
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01219472 6

1er Fascicule

COURS

d'Analyse Infinitésimale

PAR

Ch.-J. de la Vallée Poussin
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
CORRESPONDANT DE L'INSTITUT DE FRANCE

TOME II

Cinquième édition

1924

LOUVAIN
LIBRAIRIE UNIVERSITAIRE
A. UYSTPRUYST, éditeur
10, rue de la Monnaie

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
éditeur
55, Quai des Grands Augustins

IMPRIMÉ EN BELGIQUE



CHAPITRE PREMIER

Intégrales généralisées et fonctions d'un paramètre

§ 1. Intégrales généralisées

1. Intégrales proprement dites, intégrales généralisées. — La définition primitive des intégrales simples ou multiples suppose la fonction et le domaine d'intégration limités. Si la fonction ou le domaine d'intégration devient infini, il faut un passage à la limite de plus pour définir l'intégrale. Nous donnerons aux intégrales qui comportent ce nouveau passage à la limite le nom d'*intégrales généralisées*, par opposition aux précédentes que nous appellerons des *intégrales proprement dites*. Les principes de ces nouvelles définitions ont déjà été brièvement indiqués dans le premier volume (n° 184).

Nous commencerons par exposer un théorème qui est souvent utile dans les recherches relatives à ces intégrales.

2. Deuxième théorème de la moyenne. — I. *Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions bornées et intégrables dans l'intervalle (a, b). Si, pour $x > a$ et $< b$, $\varphi(x)$ est : 1° positive, 2° non décroissante, 3° $\leqslant$ B, on a*

$$(1) \qquad \int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \mathrm{B} \int_\xi^b f(x)\, dx, \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

Décomposons l'intervalle (a, b) en éléments infiniment petits par les points $x_1 = a, x_2, x_3, \dots x_{n+1} = b$. Désignons, en général, par δ_i l'amplitude et par ξ_i un point intermédiaire de l'élément (x_i, x_{i+1}). Le premier membre de (1) est la limite de la somme

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx,$$

car la différence de ces deux expressions, à savoir

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varphi(x) - \varphi(\xi_i)] f(x)\, dx,$$

tend vers zéro. En effet, soient Δ_i l'oscillation de φ dans l'intérieur de δ_i et λ la plus grande des intégrales de $|f|$ dans les divers intervalles δ_i, cette différence est moindre en valeur absolue que

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f|\, dx < \lambda \Sigma \Delta_i \leqslant \lambda B,$$

et elle tend vers zéro avec λ (qui tend évidemment vers 0 avec les δ_i). Donc, en écrivant la même somme autrement, le premier membre de (1) est aussi la limite de

$$\sum_{1}^{n} \varphi(\xi_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \sum_{1}^{n} \varphi(\xi_i) \left[\int_{x_i}^{b} - \int_{x_{i+1}}^{b} f\, dx \right]$$
$$= \varphi(\xi_i) \int_{a}^{b} f\, dx + \sum_{2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})] \int_{x_i}^{b} f\, dx.$$

On ne change pas non plus cette limite par l'addition d'un terme qui tend vers 0, de sorte que le premier membre de (1) est encore la limite de l'expression

$$\varphi(\xi_i) \int_{a}^{b} f\, dx + \sum_{2}^{n} [\varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_{i-1})] \int_{x_i}^{b} f\, dx + [B - \varphi(\xi_n)] \int_{x_n}^{b} f\, dx.$$

Les coefficients des trois intégrales de $f\, dx$ qui sont écrites dans cette expression sont respectivement positifs en vertu des trois hypothèses du théorème. Donc, en désignant par μ une moyenne entre ces intégrales ou, ce qui revient au même, entre les valeurs de $\int_{x}^{b} f\, dx$ dans l'intervalle (a, b) de x, l'expression précédente est de la forme

$$\mu [\varphi(\xi_1) + \varphi(\xi_2) - \varphi(\xi_1) + \ldots + B - \varphi(\xi_n)] = \mu B.$$

Sa limite, ou le premier membre de (1), est donc aussi de la forme μB. D'ailleurs la fonction continue $\int_{x}^{b} f\, dx$ atteint la va-

leur intermédiaire μ pour une valeur au moins ξ de x dans l'intervalle (a, b) ce qui établit l'équation (1).

II. *Plus généralement, quel que soit le signe de $\varphi(x)$, si, pour $x > a$ et $< b$, cette fonction est : 1° $\geqq$ A et $\leqq$ B, 2° non décroissante, on a*

$$(2)\quad \int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \mathrm{A}\int_a^\xi f(x) + \mathrm{B}\int_\xi^b f(x), \qquad (a \leqq \xi \leqq b),$$

Si $\varphi(x)$ était non croissante, la formule subsisterait sauf qu'il faudrait y permuter A et B.

En effet, si $\varphi(x)$ croît, on a, par le théorème I ($\varphi - \mathrm{A}$ étant positif),

$$\int_a^b (\varphi - \mathrm{A})f dx = (\mathrm{B} - \mathrm{A})\int_\xi^b f dx,$$

ce qui revient à la formule (2). Si, au contraire, φ décroît, on changera dans la formule (2) le signe de φ, donc ceux de A et de B, ce qui revient à changer les signes des deux membres et, comme $-\varphi$ croît, on sera ramené au cas précédent.

La proposition II donne lieu à deux formules particulières, souvent employées :

III. *On a, en particulier, sous les conditions de la proposition* II,

$$(3)\quad \int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a+0)\int_a^\xi f dx + \varphi(b-0)\int_\xi^b f dx.$$

En effet, on peut faire, dans la formule (2), $\mathrm{A} = \varphi(a+0)$ et $\mathrm{B} = \varphi(b-0)$ en désignant par là les limites de φ quand x tend vers a en décroissant ou vers b en croissant, limites toujours existantes car, dans les deux cas, la variation de φ ne change pas de sens.

IV. *Si la variation de $\varphi(x)$ ne change pas de sens dans l'intervalle (a, b), on a*

$$(4)\quad \int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f dx + \varphi(b)\int_\xi^b f dx.$$

En effet $\varphi(x)$ reste alors compris entre $\varphi(a) = \mathrm{A}$ et $\varphi(b) = \mathrm{B}$.

3. Définition des intégrales à limites infinies. — Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable au sens élémentaire, c'est-à-dire n'ayant que des points de discontinuité isolés dans l'intervalle (a, x') quelque grand que soit x' ; par définition,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x'=\infty} \int_a^{x'} f(x)\,dx.$$

Si cette limite est finie et déterminée, l'intégrale *existe* ou est *convergente*. Dans le cas contraire, l'intégrale *n'existe pas* ou est *divergente*. Ceci peut avoir lieu de plusieurs manières. Si la limite est infinie, positive ou négative, l'intégrale est *infinie positive* ou *négative*. S'il n'y a pas de limite, l'intégrale est *indéterminée*, mais elle n'est pas nécessairement dépourvue de toute signification, car l'indétermination peut être incomplète. Ainsi les plus grande et plus petite limites du second membre de l'équation sont les *limites d'indétermination* de l'intégrale.

Si l'on sait effectuer l'intégration indéfinie de $f(x)$, la connaissance d'une fonction primitive $F(x)$ permet de reconnaître immédiatement si l'intégrale existe et d'en calculer la valeur. Il faut, pour que l'intégrale existe, que $F(x)$ ait une limite finie $F(\infty)$ pour $x = \infty$ et l'intégrale aura pour valeur $F(\infty) - F(a)$.

Mais, en général, on ne connaît pas de fonction primitive et il faut un examen plus minutieux.

D'après les principes de la théorie des limites, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale à limite infinie *converge*, est que la différence des deux intégrales prises dans les intervalles (a, x') et (a, x'') soit infiniment petite, x' et x'' étant des infiniment grands indépendants. Cette différence se réduit à l'intégrale, prise entre deux limites qui augmentent indéfiniment,

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx,$$

que l'on appelle une *intégrale singulière*. Donc, *pour que l'intégrale à limite infinie existe, il est nécessaire et suffisant que l'intégrale singulière correspondante ait pour limite* 0.

La condition se simplifie quand $f(x)$ ne change pas de signe, car, dans ce cas, l'intégrale entre a et x' varie toujours dans le même sens quand x' augmente. L'intégrale entre a et l'infini sera donc nécessairement convergente ou infinie.

Une intégrale est *absolument convergente* quand elle converge après qu'on y a remplacé $f(x)$ par sa valeur absolue ; et alors elle est convergente, car la valeur absolue de l'intégrale singulière ne diminue certainement pas quand on rend tous ses éléments positifs, et si elle tend vers 0 après ce changement, elle tendait déjà vers 0 avant.

On considère aussi des intégrales dont la limite inférieure est infinie. En supposant $f(x)$ toujours finie et intégrable dans l'intervalle (x', b), elles se définissent par la formule analogue à la précédente

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{x'=-\infty} \int_{x'}^{b} f(x)dx.$$

Elles donnent lieu aux mêmes considérations que les intégrales précédentes et s'y ramènent d'ailleurs en changeant x en $-x$.

Enfin, si les deux limites sont infinies, on pose (le choix de a étant évidemment indifférent)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

ce qui ramène aux deux cas précédents.

4. Règles de convergence absolue. (Limites infinies). — Nous nous bornerons à la seule intégrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$, car les règles relatives aux autres s'obtiennent par analogie. Nous remarquerons d'abord que cette intégrale sera convergente ou non, absolument convergente ou non, en même temps que $\int_p^\infty f(x)dx$ où p est un nombre aussi grand qu'on veut, car elle n'en diffère que par une intégrale proprement dite. C'est pourquoi, la limite inférieure de l'intégrale étant indifférente dans les règles suivantes (sous la seule condition que $f(x)$ soit intégrable), nous nous dispenserons de l'écrire.

I. *Supposons qu'on ait* $| f(x) | \leqslant | \varphi(x) |$ *à partir d'une certaine valeur de* x, *et formons les deux intégrales :*

$$\int^{\infty} f dx, \qquad \int^{\infty} \varphi\, dx.$$

Si la seconde est absolument convergente, la première l'est aussi ; si la première n'est pas absolument convergente, la seconde ne l'est pas non plus.

En effet, si l'intégrale de $| \varphi |$ est finie, celle de $| f |$ le sera *a fortiori* (donc elle convergera) ; si l'intégrale de $| f |$ est infinie, celle de $| \varphi |$ le sera *a fortiori* (donc celle de φ ne sera pas absolument convergente).

On applique souvent ce théorème dans le cas où f est infiniment petit par rapport à φ pour $x = \infty$; il prouve alors que, si la seconde intégrale est absolument convergente, la première l'est aussi.

II. *Si* φ *ne change pas de signe et que le quotient* $f : \varphi$ *tende vers une limite* L *finie et différente de* 0 *pour* $x = \infty$, *les deux intégrales de la règle précédente seront en même temps soit absolument convergentes soit divergentes.*

En effet, si x croît suffisamment, $f(x)$ finit par rester compris entre $(\mathrm{L} - \varepsilon)\, \varphi(x)$ et $(\mathrm{L} + \varepsilon)\, \varphi(x)$. Or, les deux intégrales

$$\int^{\infty} (\mathrm{L} - \varepsilon) \varphi dx = (\mathrm{L} - \varepsilon) \int^{\infty} \varphi dx, \qquad \int^{\infty} (\mathrm{L} + \varepsilon) \varphi dx = (\mathrm{L} + \varepsilon) \int^{\infty} \varphi dx,$$

convergent ou divergent en même temps que celle de φ, et cela *absolument* car leur élément ne change pas de signe ; nous en concluons, par le théorème I, que l'intégrale de $f dx$ ayant son élément intermédiaire entre ceux des précédentes, converge ou diverge en même temps qu'elles.

III. *Si, pour* x *infini,* $f(x)$ *est infiniment petit d'ordre déterminé* α, *la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de* $\int^{\infty} f dx$ *est que l'on ait* $\alpha > 1$ *et alors la convergence est absolue.*

On dit que f est infiniment petit d'ordre α si le rapport $f(x) : x^{-\alpha}$ tend vers une limite L, finie et différente de 0, pour $x = \infty$. Cette règle est donc un cas particulier de la précé-

dente : l'intégrale de $f dx$ converge ou diverge en même temps que celle de $x^{-\alpha}\, dx$, laquelle converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$. On le vérifie directement au moyen de l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \text{ si } \alpha \text{ diffère de } 1 ; \\ \text{Log}\, x, \text{ si } \alpha = 1, \end{array} \right.$$

qui tend vers l'infini avec x, sauf si α est > 1.

Exemples. — Les intégrales suivantes convergent, par la règle III où $\alpha = 2$:

$$\int^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}, \qquad \int^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(a^2+x^2)^2}, \qquad \int^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}.$$

Les intégrales suivantes (dont l'élément est moindre en valeur absolue que celui de la dernière écrite ci-dessus) sont absolument convergentes par la règle I :

$$\int^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{a^2+x^2}, \qquad \int^{\infty} \frac{\sin x\, dx}{x(a^2+x^2)}.$$

Soient a et n des quantités positives ; les intégrales suivantes (dont l'élément est infiniment petit par rapport à $dx : x^{1+}$) convergent par la même règle :

$$\int^{\infty} e^{-ax}\, dx, \qquad \int^{\infty} x^n e^{-ax}\, dx, \qquad \int^{\infty} x^n e^{-ax} \cos bx\, dx.$$

5. Règles applicables à la convergence non absolue. — IV. *Si une intégrale* $F(x)$ *de* $\varphi(x)$ *reste finie pour* $x = \infty$, *l'intégrale*

$$\int \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\, dx$$

converge pour toute valeur positive de α.

On a, en effet, par intégration par parties, puis passage à la limite,

$$\int_a^{x'} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\, dx = \left[\frac{F(x)}{x^{\alpha}}\right]_a^{x'} + \alpha \int_a^{x'} \frac{F(x)\, dx}{x^{1+\alpha}},$$

$$\int_a^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\, dx = -\frac{F(a)}{a^{\alpha}} + \alpha \int_a^{\infty} \frac{F(x)\, dx}{x^{1+\alpha}}.$$

Or cette dernière intégrale converge par la règle II, car $F(x)\,dx : x^{1+\alpha}$ est infiniment petit par rapport à $dx : x^{1+\varepsilon}(\varepsilon < \alpha)$, ce qui est l'élément d'une intégrale convergente.

Par exemple, les *sinus* et *cosinus* ayant leurs intégrales finies et périodiques, cette règle prouve l'existence des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

V. *Soit $\varphi(x)$ une fonction dont le sens de variation ne change pas et qui tend vers une limite finie pour $x = \infty$; formons les deux intégrales*

$$\int^\infty f(x)\,dx, \qquad \int^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

si la première converge, la deuxième converge aussi.

En effet, par le deuxième théorème de la moyenne, on a

$$\int_{x'}^{x''} \varphi f\,dx = \varphi(x') \int_{x'}^{\xi} f\,dx + \varphi(x'') \int_{\xi}^{x''} f\,dx$$
$$(x' < \xi < x'').$$

Si x', x'' et, par suite, ξ tendent vers l'infini, les deux intégrales singulières du second membre tendent vers 0 par hypothèse. Comme elles sont multipliées par des quantités finies par hypothèse, le second membre tend vers 0 et, avec lui, l'intégrale singulière du premier membre, ce qui prouve le théorème.

VI. *Soient $\varphi(x)$ une fonction dont le sens de variation ne change pas et qui a pour limite 0 pour $x = \infty$, ensuite $F(x)$ une fonction primitive de $f(x)$; si $F(x)$ est bornée pour $x = \infty$, l'intégrale $\int^\infty f(x)\,\varphi(x)\,dx$ sera convergente.*

En effet, la formule de la démonstration précédente subsiste ; son second membre peut se mettre sous la forme

$$\varphi(x') \Big| F(x) \Big|_{x'}^{\xi} + \varphi(x'') \Big| F(x) \Big|_{\xi}^{x''}$$

et tend vers 0 avec $\varphi(x')$ et $\varphi(x'')$, car $F(x')$, $F(\xi)$ et $F(x'')$ restent bornés.

6. Définition des intégrales de fonctions infinies. — Soit maintenant à intégrer une fonction $f(x)$ non bornée dans l'intervalle (a, b).

1° Si $f(x)$ est bornée et intégrable (au même sens que précédemment) dans l'intervalle $(a, b - \varepsilon)$ quelque petit que soit ε, mais illimitée dans l'intervalle $(b - \varepsilon, b)$, on pose, par définition, ε restant positif,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette intégrale *existe* ou soit *convergente*, est que la différence des intégrales étendues aux intervalles $(a, b - \varepsilon)$ et $(a, b - \varepsilon')$ ou que l'*intégrale singulière* à laquelle elle se réduit,

$$\int_{b-\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

ait pour limite 0, ε et ε' étant des infiniment petits (positifs) indépendants. Si l'intégrale existe, elle peut être *absolument convergente* ou non ; et, si elle n'existe pas, elle est *infinie* ou *indéterminée* comme les intégrales à limites infinies. Pratiquement, on ne rencontre guère que des intégrales absolument convergentes.

2° Si f est bornée et intégrable dans l'intervalle $(a + \varepsilon, b)$ mais illimitée dans $(a, a + \varepsilon)$, l'intégrale dans (a, b) se définit par la formule, analogue à la précédente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Elle existera si l'*intégrale singulière* $\int_{a+\varepsilon'}^{a+\varepsilon} f dx$ tend vers 0, ε et ε' étant des infiniment petits indépendants.

3° Si f est bornée et intégrable dans l'intervalle (a, b) sauf aux environs des extrémités a et b, on partagera l'intervalle en deux autres par un point intermédiaire c (dont le choix est indifférent) et l'intégrale dans (a, b) sera la somme de celles dans (a, c) et (c, b).

4° Plus généralement, $f(x)$ peut être bornée et intégrable dans toute portion de l'intervalle (a, b) ne contenant pas un

nombre limité de *valeurs singulières* aux environs desquelles elle devient infinie. Supposons, pour fixer les idées, que les valeurs a et b soient de ce nombre et désignons les autres x_1, x_2... L'intégrale étendue à (a, b) sera, par définition, la somme de celles étendues à (a, x_1), (x_1, x_2),... ce qui ramène au cas précédent. La condition d'existence de l'intégrale étendue à (a, b) est donc que chacune des intégrales singulières :

$$\int_{a+\varepsilon'}^{a+\varepsilon} f\,dx, \qquad \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\varepsilon'} f\,dx, \qquad \int_{x_1+\varepsilon'}^{x_1+\varepsilon} f\,dx, \ldots$$

ait pour limite 0, ε et ε' étant des infiniment petits indépenpendants.

7. Propriétés des intégrales généralisées. — I. Les définitions précédentes sont évidemment telles que, si l'on partage l'intervalle (a, b) en plusieurs parties, l'intégrale dans (a, b) sera la somme des intégrales dans chaque partie.

II. Les conditions d'existence que nous venons d'écrire expriment que *l'intégrale* $\int^x f\,dx$ *est encore une fonction continue de x dans l'intervalle* (a, b). En effet, en faisant tendre ε' vers 0 avant ε, on en conclut que les intégrales :

$$\int_a^{a+\varepsilon} f\,dx, \qquad \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1} f\,dx, \qquad \int_{x_1}^{x_1+\varepsilon} f\,dx, \ldots$$

sont infiniment petites avec ε. Donc l'intégrale entre a et x est continue aux points singuliers a, x_1,... les seuls pour lesquels sa continuité soit en question.

III. On peut énoncer, pour les intégrales généralisées, un *théorème analogue à celui de la moyenne*. Ainsi, si f a une borne inférieure m ou bien une borne supérieure M dans l'intervalle (a, b), on a

$$\int_a^b f\,dx \geqq m(b-a) \qquad \text{ou bien} \qquad \int_a^b f\,dx \leqq \mathrm{M}(b-a).$$

En effet, en admettant pour fixer les idées que b soit le seul point singulier, ces relations ont lieu quand on y remplace b par $b-\varepsilon$; elles subsistent donc, à la limite, pour $\varepsilon = 0$.

8. Règles de convergence (fonctions infinies). — I. *Supposons qu'on ait $|f(x)| \leq |\varphi(x)|$, sauf pour les valeurs singulières de x, et formons les intégrales :*

$$\int_a^b f\,dx, \qquad \int_a^b \varphi\,dx.$$

Si la seconde est absolument convergente, la première l'est aussi. Si la première n'est pas absolument convergente, la seconde ne l'est pas non plus.

Ce théorème se démontre comme le théorème analogue relatif aux intégrales à limites infinies (n° 4, I).

Supposons maintenant, pour fixer les idées, que $f(x)$ ne soit infinie que quand x tend vers b. La règle suivante, énoncée dans cette hypothèse spéciale, s'adaptera d'elle-même aux autres cas :

II. *Si φ ne change pas de signe quand x tend vers b (unique valeur singulière) et que le quotient $f : \varphi$ tende vers une limite L finie et différente de 0 quand x tend vers b, les deux intégrales de la règle précédente seront en même temps absolument convergentes ou en même temps divergentes.*

La démonstration faite (n° 4, II) pour les intégrales à limites infinies se généralise d'elle-même.

III. *Si, pour chaque valeur singulière, $f(x)$ est infinie d'ordre déterminé α, la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\int_a^b f(x)\,dx$ est que tous ces ordres α soient < 1 et alors la convergence sera absolue.*

Ce théorème se ramène au précédent par la définition de l'*ordre d'infinitude*. On dit que $f(x)$ est infinie d'ordre α $(\alpha > 0)$ pour $x = c$, si l'on a

$$f(x) = \frac{\psi_1(x)}{(c-x)^\alpha} \text{ (pour } x < c\text{)}, \qquad f(x) = \frac{\psi_2(x)}{(x-c)^\alpha} \text{ (pour } x > c\text{)},$$

les fonctions ψ_1 et ψ_2 ayant, quand x tend vers c, des limites finies et différentes de 0. Toutefois, si c est une des extrémités de l'intervalle (a, b), on ne tient compte que du seul cas où x varie dans cet intervalle.

Ceci posé, nous pouvons admettre dans la démonstration que b soit la seule valeur singulière. Il suffit alors d'appliquer l'énoncé du théorème précédent en y faisant $\varphi = (b-x)^{-\alpha}$, car l'intégrale de $(b-x)^{-\alpha}\,dx$ converge dans l'intervalle (a, b) si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$. On le vérifie directement au moyen de l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = \begin{cases} -(b-x)^{1-\alpha} : (1-\alpha) \text{ si } \alpha \text{ diffère de } 1, \\ -\operatorname{Log}(b-x) \text{ si } \alpha = 1, \end{cases}$$

qui est infinie quand x tend vers b, sauf si $\alpha < 1$.

Par exemple, si p et q désignent deux nombres compris entre 0 et 1, l'intégrale

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

est absolument convergente, car, pour chacune des deux valeurs singulières 0 et 1, $f(x)$ est infinie d'ordre < 1.

9. Intégrales généralisées élémentaires. Intégrales doublement généralisées. — Une même intégrale peut comporter en même temps les deux sortes de généralisations précédentes. C'est ce qui arrive si l'on intègre dans un intervalle infini une fonction présentant des points singuliers isolés où elle devient infinie.

Si ces points sont en nombre limité, pour définir l'intégrale étendue de a à l'infini, on désigne par b un nombre arbitraire supérieur à toutes les valeurs singulières et l'on pose, par définition,

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{\infty} f(x)\,dx.$$

Par exemple, si l'on a $0 < a < 1$, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

est *absolument convergente* comme somme de deux intégrales absolument convergentes.

Plus généralement, s'il y a une infinité de valeurs singulières isolées et que l'intégrale existe dans toute portion

limitée de l'intervalle d'intégration, on la définit dans l'intervalle entier par les mêmes passages à la limite qu'au n° 3.

Quand la fonction à intégrer est positive et les valeurs singulières isolées, l'intégrale est toujours *déterminée* : sa valeur est finie ou infinie positive.

Les définitions peuvent se généraliser, mais les précédentes suffisent en pratique. Nous dirons que les intégrales qui rentrent dans ces définitions sont des *intégrales généralisées élémentaires*. Ces intégrales sont donc celles de fonctions ne présentant que des points de discontinuité isolés.

10. Valeurs principales. — Cauchy a fait grand usage de ce qu'il appelle la *valeur principale* d'une intégrale indéterminée. Soit d'abord $f(x)$ une fonction continue pour toutes les valeurs de x. Il peut arriver que la définition habituelle,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x',\,x''=\infty} \int_{-x''}^{x'} f(x)\,dx,$$

ne conduise à aucun résultat déterminé, mais que la limite existe si l'on fait $x''=x'$. Dans ce cas, cette limite sera, par définition, la *valeur principale* de l'intégrale du premier membre.

De même, soit $f(x)$ une fonction continue en tout point de l'intervalle (a, b), sauf un seul point x_1 où elle est infinie; il se peut que la définition habituelle,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon,\,\varepsilon'=0} \left(\int_a^{x_1-\varepsilon} + \int_{x_1+\varepsilon'}^{b}\right) f(x)\,dx,$$

ne conduise à aucun résultat déterminé, mais que la limite existe en faisant $\varepsilon'=\varepsilon$. Cette limite est alors, par définition, la *valeur principale* du premier membre. On aperçoit immédiatement, en partageant l'intervalle d'intégration, ce que deviendra cette définition s'il y a plusieurs points singuliers entre a et b.

Par exemple, l'intégrale de $dx : x$ est indéterminée si on l'étend de -1 à $+1$, mais sa valeur principale est nulle.

11. Calcul des intégrales généralisées. Intégration par décomposition et par parties. — 1° La formule fondamentale pour le calcul des intégrales définies,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

subsiste si l'intégrale est généralisée, pourvu que la fonction $F(x)$ soit continue en tout point de l'intervalle (a, b) sans exception et qu'elle ait $f(x)$ pour dérivée sauf aux points singuliers de $f(x)$. Nous avons déjà établi ce théorème dans le premier volume (n° 184) et montré qu'il subsiste pour $b = \infty$ quand $F(x)$ a une limite $F(\infty)$ pour $x = \infty$.

2° La formule d'intégration par décomposition se généralise aussi. Soit $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$; on aura (a et b pouvant être infinis)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx,$$

pourvu que deux au moins de ces trois intégrales soient déterminées, la troisième l'étant alors nécessairement, car la limite d'une somme est toujours égale à la somme des limites supposées existantes.

Remarque. — Supposons qu'on sache seulement qu'une des deux intégrales du second membre est déterminée. Si l'on s'interdit de faire passer les termes d'un membre dans l'autre, on pourra encore écrire la formule précédente, mais elle signifiera seulement que les deux membres sont ou égaux ou tous deux indéterminés mais avec les mêmes limites d'indétermination s'il y en a.

Pour justifier cette remarque, considérons un cas particulier, le raisonnement étant général. Supposons a et b finis et admettons que f, f_1 et f_2 n'aient qu'un point singulier b. Si c'est l'intégrale de f_1 qui est déterminée, on aura, η tendant vers 0 avec ε.

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^{b-\varepsilon} f_2(x)\,dx + \eta.$$

Donc, ε étant infiniment petit, toute restriction à l'indétermination d'un des deux membres de cette relation entraîne la même restriction pour l'autre membre.

Cette remarque a son importance pour reconnaître si une intégrale donnée est déterminée ou non, car, si l'on peut simplifier celle-ci par l'addition d'une intégrale déterminée, il suffira de raisonner sur l'intégrale simplifiée.

3° Quand la Règle d'intégration par parties est encore applicable, elle résulte des précédentes. Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions continues entre a et b mais dont les dérivées $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ n'aient que des points de discontinuité isolés. On a, par la première règle qui précède,

$$\int_a^b [f(x)\varphi'(x) + \varphi(x)f'(x)]\,dx = [f(x)\varphi(x)]_a^b.$$

Donc, si l'une des deux intégrales :

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx, \qquad \int_a^b \varphi(x)f'(x)\,dx$$

est déterminée, l'autre l'est aussi et l'on a

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \int_a^b \varphi(x)f'(x)\,dx.$$

Si a ou b est infini, le terme aux limites peut être indéterminé et il faut une condition de plus pour légimiter la formule précédente. Il faut admettre que deux au moins des trois termes qu'elle renferme aient une valeur déterminée et alors ils sont déterminés tous les trois.

12. Changement de variables. — La formule de transformation des intégrales définies par substitution établie dans le premier volume, peut être généralisée. Voici cette formule, dans laquelle nous supposerons, pour fixer les idées, que T est $> t_1$:

$$(1) \qquad \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(\mathrm{T})} f(x)\,dx = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

On peut énoncer la règle suivante :

Si la dérivée $\varphi'(t)$ est continue et différente de 0 dans l'intervalle (t_1, T) sauf peut-être aux extrémités, la formule (1) subsiste pour les intégrales généralisées en ce sens que les deux membres seront ou bien égaux ou bien

tous deux indéterminés, mais avec les mêmes limites d'indétermination s'il y en a.

Cette règle n'exclut pas le cas où $\varphi(t)$ serait discontinue aux extrémités t_1 et T, ni celui où t_1 et T seraient eux-mêmes infinis, mais il faut alors, comme la démonstration va le montrer, que $\varphi(t_1)$ et $\varphi(T)$ désignent les limites de $\varphi(t)$ quand t tend vers t_1 en décroissant ou vers T en croissant, limites qui seront finies ou infinies (de signe déterminé), puisque, φ' ne s'annulant pas, la variation de φ ne change pas de sens.

Cette remarque faite, nous pouvons démontrer la règle.

Supposons d'abord que t_1 et T soient finis et admettons, pour fixer les idées, qu'il n'y ait de point singulier de $f(x)$ ou de $f(\varphi)$ qu'aux deux limites des intégrales. Quand t varie de t_1 à T, la fonction $\varphi(t)$ varie toujours dans le même sens et ne passe qu'une fois par les valeurs $\varphi(t_1+\varepsilon)$ et $\varphi(T-\eta)$, en sorte que l'on a, sans difficulté, les deux membres étant des intégrales proprement dites,

$$\int_{\varphi(t_1+\varepsilon)}^{\varphi(T-\eta)} f(x)\,dx = \int_{t_1+\varepsilon}^{T-\eta} f(\varphi)\,\varphi'\,dt. \tag{2}$$

Si l'on fait tendre ε et η vers 0, on obtient la relation (1) à la limite, avec le sens précis que nous lui avons donné.

Par exemple, par la substitution $x=\sin^2 t$, on a

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1}(\cos t)^{2q-1}\,dt$$

et, par la substitution $x=-\log t$,

$$\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx = -\int_1^0 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{a-1} dt = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{t}\right)^{a-1} dt.$$

Si t_1 et T étaient infinis, il faudrait simplement, pour faire la démonstration, remplacer dans la formule (2), $t_1+\varepsilon$ par un infiniment grand négatif t', et $T-\eta$ par un infiniment grand positif T', la formule (2) subsistant avec ces nouvelles limites en vertu de la démonstration même que nous venons de faire.

Par exemple, on a, par la substitution $x = \sqrt{t}$,

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt.$$

Remarque. — Lorsque les conditions de la règle précédente ne sont pas vérifiées, il faut le plus souvent, pour procéder avec sécurité, partager l'intervalle (t_1, T) en intervalles partiels satisfaisant aux conditions de la règle et étudier la transformation dans chaque intervalle séparément. Toutefois, dans certains cas, on peut utiliser la règle suivante :

Si $\varphi(t)$ est continue entre t_1 et T et que $\varphi'(t)$ ne soit nulle ou discontinue qu'en des points isolés de l'intervalle (t_1, T), la formule (1) subsiste pourvu que son second membre soit déterminé.

En effet, on peut écrire la formule analogue à (1) pour chacun des intervalles de t compris entre deux points singuliers consécutifs de $\varphi'(t)$. Pour chacun d'eux, les deux membres de la formule obtenue sont déterminés et égaux. En ajoutant ces diverses formules, on retrouve la formule (1), dont les deux membres sont donc aussi déterminés et égaux.

13. Nouvelle définition des intégrales généralisées élémentaires de fonctions positives. — Soit $f(x)$ une fonction non négative, admettant une intégrale généralisée élémentaire (n° 9). Définissons une fonction auxiliaire $f_n(x)$ en posant :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), \text{ si } f \leq n\,; \\ n, \text{ si } f > n. \end{cases}$$

Cette fonction est bornée et n'est discontinue qu'avec f. Elle peut servir à définir l'intégrale généralisée de f par un seul passage à la limite, au moyen des formules suivantes :

Si l'intervalle d'intégration est borné, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,;$$

et si cet intervalle est infini, soit par exemple $(-\infty, +\infty)$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_{-n}^{+n} f_n(x)\,dx.$$

En effet, les limites (finies ou infinies) écrites dans les seconds membres existent et ne peuvent surpasser les valeurs des premiers membres (car $f_n \leq f$), il suffit donc de prouver qu'elles ne sont pas moindres.

Faisons d'abord cela pour la première formule. Il y a dans (a, b) un nombre limité de valeurs singulières où f cesse d'être borné, et il suffit de prouver la formule dans l'intervalle de deux d'entre elles. Autant admettre que les valeurs singulières sont a et b. On a, dans ce cas, quelque petit que soit ε positif,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n\, dx \geq \lim_{n=\infty} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f_n\, dx = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f\, dx,$$

car f_n devient égal à f entre $a + \varepsilon$ et $b - \varepsilon$. Il vient donc à la limite, quand ε tend vers zéro,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n\, dx \geq \int_a^b f\, dx.$$

Passons à la seconde formule. On a, par ce qui précède, quelque grand que soit N fixe,

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n\, dx \geqslant \lim_{n=\infty} \int_{-N}^{N} f_n\, dx = \int_{-N}^{N} f\, dx\,;$$

et, en faisant tendre N vers l'infini,

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n\, dx \geq \int_{-\infty}^{+\infty} f\, dx,$$

ce qui achève la démonstration.

14. Théorème. — *Soit* $F_1, F_2, \ldots F_n, \ldots$ *une suite* NON DÉCROISSANTE *de fonctions* POSITIVES *de x ; si chaque fonction est bornée, continue (sauf peut-être pour des valeurs isolées de x indépendantes de n), et si* $F_n(x)$ *tend vers une limite finie ou infinie* $F(x)$ *quand n tend vers l'infini, on a*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b F_n(x)\, dx = \int_a^b F(x)\, dx,$$

que l'intervalle (a, b) soit fini ou non, pourvu que la fonction F *n'ait que des points de discontinuité isolés et admette, par conséquent, une intégrale élémentaire. Celle-ci d'ailleurs peut être finie ou infinie.*

La démonstration est immédiate si les fonctions F_n sont continues et l'intervalle (a, b) fini. L'énoncé revient alors à dire que l'on peut intégrer terme à terme la série de fonctions continues et positives

$$F = F_1 + (F_2 - F_1) + \ldots + (F_n - F_{n-1}) + \ldots,$$

ce qui est permis (*t.* I, n° 326).

Si l'intervalle (a, b) est encore fini, mais que les fonctions F_n cessent d'être continues en un nombre limité de points $x_1, x_2, \ldots$, on peut, comme au n° précédent, admettre que a et b soient les seules valeurs singulières. On a, dans ce cas, quel que soit ε positif, d'après ce qui vient d'être démontré,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b F_n \, dx \geqq \lim_{n=\infty} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} F_n \, dx = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} F \, dx.$$

Faisons tendre ε vers zéro, il vient, le second membre pouvant d'ailleurs croître indéfiniment,

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b F_n \, dx \geqq \int_a^b F \, dx.$$

Mais l'égalité seule est possible, car le premier membre est inférieur au second quel que soit n.

Enfin, si les limites a et b sont infinies, par exemple toutes les deux, on a, quel que soit N positif, d'après ce qu'on vient de prouver,

$$\lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_n \, dx \geqq \lim_{n=\infty} \int_{-N}^{+N} F_n \, dx = \int_{-N}^{+N} F \, dx\,;$$

et il suffit de faire tendre N vers l'infini pour démontrer la proposition, comme dans le cas précédent.

15. Intégrales doubles généralisées. — On suppose que les points de discontinuité de la fonction $f(x, y)$ à intégrer sont isolés ou répartis sur certaines lignes de discontinuité satisfaisant aux conditions stipulées dans le premier volume (n° 270). Par contre, la fonction ou le domaine d'intégration

n'est plus supposé borné. On appelle ***points singuliers*** ceux autour desquels la fonction n'est pas bornée.

FONCTIONS NON NÉGATIVES. — En premier lieu, si le domaine D est borné et limité par un contour C satisfaisant aux conditions déjà rappelées, pour définir l'intégrale d'une fonction $f(x, y)$ *non négative*,

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy,$$

on procède à peu près comme pour les intégrales simples. On commence par enlever les points singuliers du champ d'intégration. A cet effet, on entoure les points singuliers isolés d'un contour infiniment petit, on enferme les lignes de discontinuité entre deux contours infiniment voisins, et l'on considère la portion D′ de l'aire D qui est extérieure aux contours auxiliaires. L'intégrale étendue à D′ étant une intégrale proprement dite, on pose, par définition,

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \lim \int\int_{D'} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Si cette limite est finie, l'intégrale généralisée *existe*. Il suffit évidemment pour cela, f étant positif, que le second membre soit borné quand D′ tend vers D, et alors sa limite est indépendante de la manière dont D′ tend vers D. Si l'intégrale n'existe pas, elle est infinie positive.

En second lieu, si le champ d'intégration s'étend à l'infini dans certaines directions ou dans tous les sens, on procède d'une manière analogue. On considère d'abord l'intégrale (généralisée ou non) dans une portion bornée D′ de l'aire D, puis on étend successivement D′ à D tout entier : l'intégrale dans D est la limite (finie ou infinie) de celle dans D′. Cette limite sera d'ailleurs indépendante de la manière dont D′ tend vers D ; et, si D s'étend à l'infini dans plusieurs directions, D′ peut croître à l'infini soit *simultanément* soit *successivement* dans les divers sens.

Le cas des fonctions non positives se ramène à celui-ci par un simple changement de signe ; il n'y a pas lieu de s'y arrêter.

Fonctions de signe variable. — *On ne reconnaît d'existence à l'intégrale double généralisée d'une fonction de signe variable que si elle est absolument convergente,* c'est-à-dire que si l'intégrale

$$\iint_D |f(x, y)| \, dx \, dy$$

existe.

Si cette condition est remplie, l'intégrale de $f(x, y)$ dans D se définit par les mêmes passages à la limite que pour les fonctions positives et l'on est assuré que cette limite est finie et unique de quelque manière que D' tende vers D. En effet, la fonction f est alors la différence de deux fonctions non négatives $|f|$ et $|f| - f$, dont les intégrales existent.

Remarque. — Si f est positive, son intégrale généralisée dans D peut encore se définir à l'aide de la fonction auxiliaire f_n, déjà définie,

$$f_n = \begin{cases} n, \text{ si } f \geq n\,; \\ f, \text{ si } f < n. \end{cases}$$

En effet, si D est borné, on a

$$\iint_D f \, dx \, dy = \lim_{n \to \infty} \iint_D f_n \, dx \, dy\,;$$

et, si D n'est pas borné, on a, D_n tendant vers D quand n tend vers l'infini,

$$\iint_D f \, dx \, dy = \lim_{n \to \infty} \iint_{D_n} f_n \, dx \, dy.$$

Les démonstrations se font comme pour les intégrales simples.

16. Réduction des intégrales doubles généralisées à des intégrales simples. — *Si $f(x, y)$ ne change pas de signe dans le domaine* D *borné ou non, son intégrale dans* D *se réduit à deux intégrales simples consécutives par la règle ordinaire, pourvu que l'intégration par rapport à la première variable fournisse une fonction de la seconde qui n'ait que des points de discontinuité isolés.* Cette règle s'applique que l'intégrale double soit finie ou infinie.

Premier cas : *L'intégrale double est étendue à tout le plan.* Définissons f_n comme au n° précédent et posons

$$F_n(x) = \int_{-n}^{n} f_n\,dy.$$

Soient D' la portion de D entre les abscisses — N et + N, D'_n celle de D' entre les ordonnées $-n$ et $+n$. Utilisons la remarque qui termine le n° précédent. Il vient, la réduction se faisant sur une intégrale proprement dite,

$$\iint_{D'} f\,dx\,dy = \lim_{n=\infty} \iint_{D'_n} f\,dx\,dy = \lim_{n=\infty} \int_{-N}^{N} F_n(x)\,dx.$$

La fonction $F_n(x)$ est continue, sauf peut-être pour les abscisses d'une ligne de discontinuité de $f(x, y)$ parallèle à l'axe de y, celles-ci supposées en nombre limité entre — N et N. On peut donc appliquer le théorème du n° 14 et il vient, en remplaçant F_n par sa limite,

$$\iint_{D'} f\,dx\,dy = \int_{-N}^{N} dx \int_{-\infty}^{\infty} f\,dx.$$

Si l'on fait tendre N vers l'infini, D' tend vers D et l'on obtient, à la limite, la formule à démontrer :

$$\iint_{D} f\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f\,dy.$$

Cas général. — Les autres cas se ramènent au précédent à l'aide d'une fonction auxiliaire f_1 égale à f dans le domaine D et à zéro en dehors. L'intégrale de f dans D revient à celle de f_1 dans tout le plan, laquelle se réduit par la formule précédente. En négligeant les intervalles où f_1 est nulle, cette formule de réduction revient à celle relative à f.

Remarque. — Si f change de signe dans le domaine D, le procédé le plus simple pour légitimer la réduction sera généralement de partager le domaine D en plusieurs autres où f n'a qu'un seul signe et d'effectuer la réduction dans chacun d'eux.

17. Interversion des intégrations. — *Si f ne change pas de signe, on a, les limites étant finies ou infinies mais constantes,*

$$\int_a^A dx \int_b^B f\,dy = \int_b^B dy \int_a^A f\,dx$$

pourvu que les intégrales intérieures soient des fonctions continues, la première de x et la seconde de y, sauf en des points isolés.

En effet, les deux membres représentent la même intégrale double, car on peut intervertir les variables x et y dans les formules du n° précédent.

18. Transformation des intégrales doubles généralisées. — Soient Ω un domaine, limité ou non, dans le plan uv, $\varphi(u, v)$ et $\psi(u, v)$ deux fonctions continues ainsi que leurs dérivées partielles, dont le jacobien J ne change pas de signe dans Ω. On ne stipule rien sur la frontière. Supposons que les formules :

$$x = \varphi(u, v) \qquad y = \psi(u, v),$$

fassent correspondre uniformément les *points intérieurs* à Ω aux *points intérieurs* à une aire D, limitée ou non, dans le plan xy. On aura

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_\Omega |J|\, f(\varphi, \psi)\,du\,dv.$$

En effet, représentons par Ω' une portion limitée de Ω, dans laquelle f est continue, et qui tend vers Ω ; le domaine correspondant D′ sera aussi limité et tendra vers D. L'équation précédente a lieu sans difficulté quand on y accentue D et Ω (t. I, n° 285) ; elle subsiste donc à la limite, et c'est précisément ce qu'on écrit en supprimant les accents.

Le sens de l'équation précédente est le même que pour la formule de transformation des intégrales simples (n° 12). Les deux membres sont soit égaux, soit tous deux indéterminés, mais alors avec les mêmes limites d'indétermination.

§ 2. Intégration et dérivation des intégrales définies Convergence uniforme. Applications

19. Intégration par rapport à un paramètre. — Soit $f(x, \alpha)$ une fonction continue des deux variables x et α dans un domaine rectangulaire R, limité par les valeurs a et b de x et par les valeurs α_0 et α_1 de α ; l'intégrale

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

est une fonction *continue* de α dans l'intervalle (α_0, α_1). On peut se proposer d'intégrer ou de dériver cette fonction.

Si l'on intègre $\varphi(\alpha)$, on tombe sur une intégrale double

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi(\alpha)\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

On peut utiliser pour la calculer toutes les méthodes de transformation étudiées dans le premier volume, mais la plus employée est la *règle d'intégration sous le signe* qui consiste à intervertir les intégrations par rapport à x et α. Toutefois il ne faut pas oublier que cette règle n'est établie que pour les intégrales proprement dites. Nous verrons tout à l'heure qu'elle ne s'étend aux intégrales généralisées que sous des conditions particulières.

20. Dérivation par rapport à un paramètre. Règle de Leibniz. — Considérons, comme au n° précédent, l'intégrale proprement dite

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

et supposons que la fonction $f(x, \alpha)$ ait une dérivée partielle $f'_\alpha(x, \alpha)$ déterminée et continue dans le rectangle limité par les valeurs a et b de x, α_0 et α_1 de α. La dérivée de $\varphi(\alpha)$ dans l'intervalle (α_0, α_1) s'obtiendra en dérivant simplement par rapport à α la fonction sous le signe d'intégration. Cette règle est celle de la *dérivation sous le signe* ou *règle de Leibniz*. C'est une conséquence de la précédente.

Soit, en effet, α un point quelconque de l'intervalle (α_0, α_1) ; on a, par la règle d'intégration sous le signe,

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx = \int_a^b [f(x, \alpha) - f(x, \alpha_0)]\, dx = \varphi(\alpha) - \varphi(\alpha_0).$$

La dérivée du premier membre par rapport à α est la fonction sous le signe d'intégration extérieur (car cette fonction est continue). Il vient donc, en égalant les dérivées des deux membres extrêmes,

$$\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx = \varphi'(\alpha).$$

C'est la régle de Leibniz.

Cette règle suppose que les limites a et b sont indépendantes de α. Considérons maintenant une intégrale dont les limites x_1 et x_2 soient des fonctions de α, par exemple

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \alpha)\, dx, \qquad (x_2 > x_1).$$

Nous supposerons : 1° que x_1 et x_2 sont deux fonctions continues de α ayant des dérivées également continues dans l'intervalle (α_0, α_1) ; 2° que la dérivée partielle $f'_\alpha(x, \alpha)$ est déterminée et continue dans le domaine D du plan $x\alpha$ compris entre les droites $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$ et les courbes $x = x_1$, $x = x_2$.

Je dis que, sous ces conditions, l'on aura dans l'intervalle (α_0, α_1)

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\, dx + f(x_2, \alpha)\frac{dx_2}{d\alpha} - f(x_1, \alpha)\frac{dx_1}{d\alpha}.$$

On doit donc ajouter deux termes complémentaires à celui fourni par la règle de Leibniz.

Cette nouvelle règle se ramène à celle de Leibniz par un changement de variables. Substitutions, en effet, à x une nouvelle variable d'intégration t par la relation

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\, t,$$

de sorte que x est maintenant fonction de t et de α et coïncide avec x_1 pour $t = 0$ et avec x_2 pour $t = 1$. L'intégrale transformée sera

$$\varphi(\alpha) = \int_0^1 f(x, \alpha) \frac{\partial x}{\partial t}\, dt.$$

La fonction à intégrer et sa dérivée partielle par rapport à α sont des fonctions continues de t et de α dans le rectangle du plan $t\alpha$ compris entre les valeurs 0 et 1 de t, α_0 et α_1 de α. La régle de Leibniz s'applique donc à l'intégrale transformée (aux limites constantes 0 et 1) ; elle donne

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial t} + f \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \alpha} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial t} dt + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left(f \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right) dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dx + \left| f \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right|_{t=0}^{t=1}.$$

C'est, sous une autre forme, la formule qu'il fallait démontrer.

21. Convergence uniforme des intégrales généralisées. — Les règles précédentes et la continuité même de $\varphi(\alpha)$ reposent sur les hypothèses : 1° que $f(x, \alpha)$ et sa dérivée partielle (s'il s'agit de la règle de Leibniz) sont des fonctions continues ; 2° que l'intervalle d'intégration est limité. Ces règles ne s'appliquent pas toujours aux intégrales généralisées et, pour reconnaître si elles subsistent, il est commode d'introduire une notion nouvelle, celle de la *convergence uniforme* des intégrales généralisées. Il y a deux cas à considérer :

1° La fonction est continue sous le signe $\int$, mais l'une des deux limites de l'intégrale est infinie. Soit

$$\varphi(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, dx.$$

Cette intégrale converge uniformément pour un certain mode de variation de α, *par exemple dans l'intervalle* (α_0, α_1), *si à tout nombre positif* ε *si petit qu'il soit correspond un nombre* X, *indépendant de* α, *tel qu'on ait, sous la condition* $X' > X$, *et pour toutes les valeurs considérées de* α,

$$\left| \int_{X'}^{\infty} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

2° La fonction $f(x, \alpha)$ peut croître indéfiniment pour certaines valeurs de x et α, mais est continue en tout point aux environs duquel elle reste finie. Ce cas est plus complexe que le précédent, car la répartition des points de discontinuité

dans le plan (x, α) peut être plus ou moins compliquée. Ces points peuvent être isolés ou bien se suivre d'une manière continue sur certaines lignes. Pour abréger, nous nous bornerons au cas le plus simple mais le plus fréquent, celui où $f(x, \alpha)$ n'est infinie que pour un nombre limité de valeurs de x indépendantes de α.

Cette condition peut se réaliser de deux manières différentes, soit que $f(x, \alpha)$ ne devienne infinie qu'en des points isolés du plan (x, α), soit qu'elle devienne infinie le long de certaines droites parallèles à l'axe des x. Les deux intégrales suivantes sont des exemples de ces deux cas :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}, \qquad \int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)\,dx.$$

Dans la première, la fonction sous le signe n'est infinie qu'en un point isolé (l'origine) ; dans la seconde, elle est discontinue tout le long de l'axe des α positifs. Dans les définitions et les théorèmes qui vont suivre, cette distinction n'interviendra pas.

Sous les conditions précédentes, l'uniformité de la convergence des intégrales de fonctions discontinues est tout analogue à celle des intégrales à limites infinies et les théorèmes relatifs à ces diverses intégrales vont s'énoncer dans les mêmes termes.

Considérons d'abord l'intégrale

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx,$$

où $f(x, \alpha)$ ne devient infinie que pour $x = b$. Nous dirons qu'*elle converge uniformément pour un certain mode de variation de α, si à tout nombre positif ε si petit qu'il soit correspond un autre nombre positif δ indépendant de α et tel qu'on ait, sous la condition $0 < \delta' < \delta$,*

$$\left| \int_{b-\delta'}^{b} f(x, \alpha)\,dx \right| < \varepsilon.$$

On voit immédiatement comment il faut modifier la définition précédente si c'est pour $x = a$ que f devient infinie. Si cette fonction devient infinie pour plusieurs valeurs x_1, x_2...

de x, on partage l'intervalle d'intégration et, en même temps, l'intégrale proposée en plusieurs autres dans lesquels f ne devient infinie qu'à l'une des limites. Enfin, si f ayant des points de discontinuité en nombre limité, l'intégrale est à limite infinie, elle se décompose en plusieurs autres semblables aux précédentes, avec en plus une intégrale de fonction continue mais à limite infinie. Si chacune de ces intégrales composantes converge uniformément, il en sera de même pour la proposée.

Dans ces conditions, la convergence uniforme des intégrales généralisées correspond exactement à la convergence uniforme des séries étudiée dans le premier volume. Montrons, en effet, qu'une intégrale généralisée *uniformément convergente* peut se mettre sous forme d'une série uniformément convergente d'*intégrales proprement dites*.

Si l'intégrale est à limite infinie, on désignera par b_1, b_2,... b_n,... une suite de nombres croissant à l'infini et l'on écrira

$$\int_a^x f\,dx = \int_a^{b_1} + \int_{b_1}^{b_2} + \ldots + \int_{b_n}^{b_{n+1}} f\,dx + \ldots$$

et si l'intégrale du premier membre converge uniformément, il en est de même de la série du second membre.

Réciproquement, si la série converge uniformément de quelque manière qu'on choisisse b_1, b_2,..., l'intégrale converge aussi uniformément, car on peut choisir b_1, b_2,... assez rapprochés pour que l'intégrale entre a et x diffère aussi peu qu'on veut de celle entre a et l'un des b.

D'autre part, si, l'intégrale étant à limites infinies, la fonction sous le signe ne devient infinie qu'à l'une des limites, par exemple à la limite supérieure b, on désignera par b_1, b_2,... b_n,... une suite croissante de nombres tendant vers b et l'on écrira

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^{b_1} + \int_{b_1}^{b_2} + \ldots + \int_{b_n}^{b_{n+1}} f\,dx + \ldots$$

Si l'intégrale du premier membre converge uniformément, il en sera de même de la série du second membre, et réciproquement comme ci-dessus.

Il s'ensuit que l'on pourra appliquer immédiatement aux intégrales uniformément convergentes les théorèmes correspondants relatifs à la continuité, à l'intégration et à la dérivation des séries. Il est donc très utile de savoir reconnaître l'uniformité de la convergence. La règle suivante est loin d'être générale mais suffit dans beaucoup de cas.

22. Critère de convergence uniforme. — *Une intégrale généralisée qui dépend d'un paramètre converge uniformément si ses éléments successifs ne surpassent pas en valeur absolue les éléments correspondants d'une intégrale absolument convergente, prise entre les mêmes limites, mais ne renferment pas le paramètre.*

Nous pouvons borner la démonstration au cas d'une intégrale à limite infinie, car elle est analogue pour les autres cas. Comparons donc les deux intégrales :

$$\int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx, \qquad \int_a^\infty |\varphi(x)|\, dx,$$

en supposant que la seconde converge et qu'on ait constamment $|f(x, \alpha)| \leqslant |\varphi(x)|$. On aura évidemment l'inégalité

$$\left|\int_{X'}^\infty f(x, \alpha)\, dx\right| \leqslant \int_{X'}^\infty |\varphi(x)|\, dx.$$

Mais, puisque $\int_a^\infty |\varphi(x)|\, dx$ converge par hypothèse, à tout nombre ε correspond un nombre X tel que le second membre de cette inégalité soit $< \varepsilon$ pourvu que X' soit $>$ X. Alors le premier membre est *a fortiori* $\leqslant \varepsilon$, ce qui est, par définition, la condition de convergence uniforme à démontrer.

Il doit être d'ailleurs bien entendu que la fonction $f(x, \alpha)$ satisfait aux conditions de continuité que comporte la définition de la convergence uniforme donnée au n° précédent.

23. Continuité, intégration, dérivation des intégrales uniformément convergentes. — I. *Une intégrale généralisée qui contient un paramètre α est fonction continue du paramètre dans tout intervalle où la convergence est uniforme.*

II. *Quand l'expression sous le signe est positive, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale généralisée soit fonction continue du paramètre α qu'elle contient, est que la convergence soit uniforme.*

III. *L'intégration sous le signe d'une intégrale généralisée par rapport à un paramètre α demeure légitime dans tout intervalle fini où la convergence est uniforme.*

IV. *Quand l'expression à intégrer est positive, une intégrale fonction continue du paramètre α peut toujours être intégrée sous le signe entre des limites finies.*

V. *Une intégrale généralisée, fonction du paramètre α et uniformément convergente dans l'intervalle (α_0, α_1), peut s'intégrer sous le signe entre α_0 et un point variable α de l'intervalle (α_0, α_1), et la nouvelle intégrale ainsi obtenue est encore uniformément convergente dans l'intervalle (α_0, α_1).*

En répétant l'application du théorème et de la règle qui précèdent, on voit que l'intégration entre α_0 et α d'une intégrale uniformément convergente dans l'intervalle (α_0, α_1), peut être effectuée sous le signe un nombre quelconque de fois de proche en proche et que l'intégrale obtenue après un nombre quelconque d'intégrations sera uniformément convergente dans la même intervalle que la proposée.

VI. *Lorsque la dérivation sous le signe d'une intégrale proprement dite ou d'une intégrale généralisée (supposée existante) conduit à une intégrale généralisée, la règle de Leibniz demeure légitime, c'est-à-dire que l'intégrale proposée a pour dérivée l'intégrale fournie par la règle, pourvu que cette dernière intégrale converge uniformément dans le voisinage de la valeur considérée du paramètre.*

Comme il est bien entendu que les conditions de continuité que comporte la définition de la convergence uniforme (n° 21) sont vérifiées, tous ces théorèmes se ramènent aux théorèmes analogues de la théorie des séries (t. I, n° 325 à 327) en écrivant les intégrales sous forme de séries uniformément convergentes. Il serait aussi très simple de les démontrer directement en imitant les démonstrations faites pour les séries.

A titre d'exemple, considérons une intégrale à limite infinie,

$$\varphi(\alpha) = \int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, dx,$$

uniformément convergente dans un intervalle (α_0, α_1), et montrons qu'on peut l'intégrer sous le signe dans cet intervalle (Règle III). A cet effet, écrivons, sous forme de série uniformément convergente,

$$\varphi(\alpha) = \int_a^{b_1} + \int_{b_1}^{b_2} + \dots + \int_{b_{n-1}}^{b_n} f\,dx + \dots$$

Cette série peut être intégrée terme à terme et chaque terme peut s'intégrer sous le signe ; on obtient ainsi la série, uniformément convergente dans l'intervalle (α_0, α_1),

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi(\alpha)\, d\alpha = \Sigma \int_{b_{n-1}}^{b_n} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f\, d\alpha = \int_a^{\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f\, d\alpha,$$

et cette dernière intégrale est uniformément convergente comme la série.

24. Applications diverses. — 1° Calculons d'abord l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Cette intégrale a déjà été calculée dans le premier volume (n° 190). Nous allons indiquer un procédé plus rapide pour l'obtenir. Considérons pour cela l'intégrale double

$$\iint e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

étendue à un carré D compris entre les axes Ox et Oy et les deux droites $x = r$, $y = r$. On a, en faisant la réduction en coordonnées rectangulaires,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^r e^{-x^2}\, dx \int_0^r e^{-y^2}\, dy = \left[\int_0^r e^{-x^2}\, dx\right]^2.$$

D'autre part, soient D′ et D″ les quarts de cercle (de centre O) respectivement inscrit et circonscrit à D, donc de rayons r et $r\sqrt{2}$. On a, en réduisant avec les coordonnées polaires,

$$\iint_{D'} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r e^{-r^2}\, r\, dr = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-r^2}\right);$$

de même,

$$\iint_{D''} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2r^2}).$$

Mais D′ est intérieur à D, qui l'est lui-même à D″; donc l'élément étant positif, les intégrales dans D′, D et D″ se suivent par ordre de grandeur, leurs racines aussi, ce qui donne

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-r^2}} < \int_0^r e^{-x^2}\,dx < \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-2r^2}}.$$

Si r tend vers l'infini, les deux membres extrêmes tendent rapidement vers la même limite ; il vient donc

$$(1) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et l'intégrale $\int_0^r e^{-x^2}dx$ converge très rapidement vers cette valeur quand r augmente. Cette intégrale joue un rôle important en calcul des probabilités.

2° Comme second exemple, nous allons calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Dans le premier volume (n° 165), on a obtenu l'intégrale suivante :

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C.$$

On en conclut

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\,dx = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Tous les éléments de cette intégrale sont maximés et positifs pour $\alpha = 0$; comme l'intégrale converge encore pour cette valeur, elle converge uniformément de quelque manière que varie α (n° 22). Intégrons donc deux fois de suite de 0 à α, ce qui se fera sous le signe (n° 23) ; il vient

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx = \int_0^\alpha \operatorname{arctg}\alpha\,d\alpha = \alpha\operatorname{arctg}\alpha - \frac{\operatorname{Log}(1+\alpha^2)}{2}.$$

Supposons α positif et changeons x en $x : \alpha$, il vient

$$\int_0^\infty e^{-\frac{x}{\alpha}} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \operatorname{arctg}\alpha - \frac{\operatorname{Log}(1+\alpha^2)}{2\alpha}.$$

Considérons cette intégrale comme dépendant du paramètre $1 : \alpha$; tous ses éléments sont maximés et positifs pour $1 : \alpha = 0$, valeur qui laisse l'intégrale convergente. Donc l'intégrale converge uniformément (n° 22) pour les valeurs nulles ou positives de $1 : \alpha$ et elle est fonction continue de $1 : \alpha$ (n° 23). Faisons tendre α vers l'infini, ou $1 : \alpha$ vers 0 ; il vient ainsi, à la limite,

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Cette intégrale en donne d'autres. On peut d'abord intégrer par parties en considérant $dx : x^2$ comme une différentielle, ce qui donne l'intégrale du titre. On peut ensuite remplacer $1-\cos x$ par $2\sin^2 (x : 2)$ et prendre $x : 2$ comme variable d'intégration. On trouve ainsi les deux résultats :

$$(2) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Soit α un paramètre positif. Changeons la variable d'intégration x en αx dans l'intégrale (2), ce qui n'altère pas les limites ; il vient

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{si } \alpha > 0.$$

Donc, pour α positif, cette intégrale a une valeur constante indépendante de α. Si l'on change le signe de α, tous les éléments de l'intégrale changent de signe, donc l'intégrale aussi, et sa valeur sera $-\pi : 2$. Enfin, si $\alpha = 0$, tous les éléments sont nuls et l'intégrale aussi. En résumé,

$$(3) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, \text{ si } \alpha < 0 ; \\ 0, \text{ si } \alpha = 0 ; \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{ si } \alpha > 0. \end{cases}$$

Ainsi cette intégrale est une fonction discontinue du para-

mètre, sa valeur change brusquement quand α atteint ou dépasse la valeur 0. On en conclut, en vertu du théorème I du n° 23, que la convergence n'est pas uniforme quand α tend vers 0, ce qu'il est facile de vérifier directement. On a, en effet, pour α positif,

$$\int_X^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \int_{X\alpha}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

et, sous cette forme, on voit immédiatement que la convergence est uniforme si α ne tend pas vers zéro, tandis qu'elle ne l'est pas si α tend vers zéro.

L'intégrale (3) est un exemple d'intégrale qu'il n'est pas permis de dériver sous le signe par rapport à α. L'intégrale étant une constante, sa dérivée est nulle, tandis que la dérivation sous le signe conduit à une intégrale indéterminée.

25. Intégrales de Frullani. — On donne ce nom à certaines intégrales dont la valeur se détermine par la considération d'une intégrale singulière. Soit $f(x)$ une fonction continue de x pour x positif, telle que l'intégrale à limite infinie,

$$\int_A^\infty f(x)\frac{dx}{x},$$

ait une valeur déterminée pour $A > 0$; soient ensuite a et b deux constantes positives ; l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx$$

est une intégrale de *Frullani*. Pour en déterminer la valeur, écrivons

$$I = \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_\varepsilon^\infty \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_\varepsilon^\infty \frac{f(bx)}{x}\,dx\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_{a\varepsilon}^\infty - \int_{b\varepsilon}^\infty f(x)\frac{dx}{x}\right] = \lim_{\varepsilon=0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x}.$$

La valeur de cette intégrale singulière s'obtient par le théorème de la moyenne. Soit ξ une quantité comprise entre $a\varepsilon$ et $b\varepsilon$ et qui tend vers 0 avec ε, on a

$$\lim \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\frac{dx}{x} = \lim f(\xi)\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{dx}{x} = f(0)\,\mathrm{Log}\,\frac{b}{a}.$$

Par conséquent,

$$(4)\qquad \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\,\mathrm{Log}\,\frac{b}{a}.$$

Par exemple, prenant $f(x)=\cos x$, puis $f(x)=e^{-x}$, il vient $(a>0)$

$$(5)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos x-\cos ax}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\,dx = \mathrm{Log}\,a.$$

Souvent une intégrale peut se ramener à la forme (4) par un changement de variables. Ainsi, par la relation $x=e^{-z}$, il vient (a et $b>-1$)

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\mathrm{Log}\,x}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(b+1)z}}{z}\,dz = \mathrm{Log}\,\frac{b+1}{a+1}.$$

EXERCICES

1. On substitue $x\sqrt{t}$ à x dans la formule (1) ; en déduire

$$\int_0^\infty e^{-tx^2}x^{2n}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\,t^{-n-\frac{1}{2}}.$$

2. Etablir la relation

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2tx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-t^2}.$$

Soit I cette intégrale. On prouve que $\frac{dI}{dt}=-2tI$, d'où $I=I_0\,e^{-t^2}$ et I_0 est donné par la formule (1).

3. On a, par la relation $x=\mathrm{tg}\,\varphi$,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Log}\,(1+x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\,(1+\mathrm{tg}\,\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{8}\,\mathrm{Log}\,2.$$

R. En effet, $(1+\mathrm{tg}\,\varphi)$ peut s'écrire $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right) : \cos\varphi$ et est, par conséquent, un produit de trois facteurs ; donc l'intégrale peut se décomposer en une somme des trois autres. Les deux dernières se détruisent et la première donne la valeur cherchée.

4. Déduire la seconde intégrale ci-dessous de la première :

$$2\alpha\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2}\,dx = \sqrt{\pi}, \qquad \int_0^{\infty}\left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx = (b-a)\sqrt{\pi}.$$

R. On intègre par rapport à α de a à b et l'on change x en $1 : x$.

5. **Montrer que l'on a, si $a > 0$,**

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2a}, \qquad \int_0^{\infty} e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

R. Les deux relations sont équivalentes. La seconde intégrale a pour demi-dérivée par rapport à a l'expression

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2}\,dx - \int_0^{\infty} e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2}\,\frac{a\,dx}{x^2},$$

qui est nulle, car ces deux intégrales se détruisent (elles se ramènent l'une à l'autre en changeant x en $a : x$). La seconde des deux intégrales proposées est donc constante par rapport à a et on la détermine en posant $a = 0$.

6. Montrer (en développant en série par rapport à a) que l'on a

$$\int_0^{a} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\cos x}\cos(a\sin x)\,dx.$$

7. **Montrer, en développant Log $(1 + x)$ en série potentielle, que l'on a**

$$\int_0^{1} \mathrm{Log}(1+x)\frac{dx}{x} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$

La série numérique revient, en effet, à

$$\left(1 - \frac{2}{2^2}\right)\Sigma\frac{1}{n^2} = \frac{s}{2},$$

s valant $\pi^2 : 6$ (n° 301).

§ 3. Passage à la limite sous le signe d'intégration

26. Considérations préliminaires. — La considération de la convergence uniforme fournit un criterium très simple pour justifier le passage à la limite sous le signe d'intégration. On a, en effet, le théorème suivant :

Théorème. — *Si une suite de fonctions continues de x : $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$ converge uniformément dans un intervalle fini (a, b) vers une fonction limite $f(x)$, on a*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

En effet, $f(x)$ est continue, donc intégrable ; d'autre part, la différence $| f - f_n |$ devient inférieure à tout nombre positif ε quand n augmente suffisamment. La différence des deux membres de la relation précédente est donc de module moindre que

$$\lim \int_a^b | f - f_n | \, dx < \int_a^b \varepsilon \, dx = \varepsilon(b - a).$$

Elle est donc inférieure à tout nombre donné et, par conséquent, elle est nulle.

Les théorèmes sur l'intégration des séries et des intégrales uniformément convergentes ne sont que des cas particuliers du précédent ; et le théorème précédent est lui-même un cas particulier d'un théorème plus général, dû à M. Osgood, et que nous allons maintenant établir. Nous utiliserons pour cela le lemme suivant :

27. Lemme. — On considère une suite illimitée d'intervalles, formés suivant une loi assignée,

(1) $$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m, \ldots$$

tous contenus dans un intervalle (a, b). On peut alors énoncer le lemme suivant :

S'il existe un nombre $\omega > 0$ tel que l'on puisse, quel que soit le nombre p donné, trouver dans la suite un nombre limité d'intervalles d'indices $> p$, non empiétants et dont la somme des longueurs soit $> \omega$, alors il existe au moins un point commun à une infinité d'intervalles de la suite.

Dans la démonstration, nous admettrons que tout intervalle de la suite (1) qui n'est pas contenu dans l'un des précédents, a, au plus, un point commun avec lui. Cette hypothèse est légitime, car on peut la réaliser en modifiant la suite sans rien changer aux conditions du théorème. On peut, en effet, de

proche en proche, décomposer δ_2, δ_3,... en parties δ satisfaisant aux conditions précédentes et que l'on écrit successivement, à la suite les unes des autres, en place de δ_2, δ_3,..., avec une nouvelle numérotation.

Convenons de dire qu'un intervalle δ (ou un groupe de plusieurs intervalles δ) de la suite (1) est *privilégié* si l'on peut lui faire correspondre un nombre $\varepsilon > 0$, tel que, quel que soit p donné, on puisse trouver dans la suite (1) un nombre limité d'intervalles d'indices $> p$, contenus dans ce δ (ou ce groupe de δ), non empiétants et dont la somme des longueurs soit $> \varepsilon$.

D'après cette définition, si δ n'est pas privilégié, toute somme d'intervalles d'indices $> p$, contenus dans δ et non empiétants, tend vers 0 quand p tend vers l'infini. Donc un groupe de plusieurs intervalles non privilégiés ne l'est pas non plus ; et si un groupe est privilégié, il contient un intervalle privilégié.

Cette remarque permet de montrer que *tout intervalle privilégié en contient un autre de même nature*. En effet, supposons que δ_1 soit privilégié et que la suite (1) ne renferme que des intervalles contenus dans δ_1, ce qui est légitime, car il est évidemment permis de supprimer les autres intervalles. Deux cas sont possibles :

1° On peut former un groupe de k intervalles δ_2, δ_3,... contenant tous les suivants ; alors ce groupe est privilégié et contient un intervalle privilégié.

2° Dans le cas contraire, la mesure d'une somme d'intervalles non empiétants de la suite δ_2, δ_3,... a une borne supérieure $L \leqslant \delta_1$. On peut donc former un groupe d'intervalles non empiétants de mesure $> L - \varepsilon : 2$. Alors ce groupe est privilégié (avec substitution de $\varepsilon : 2$ à ε), car toute somme $> \varepsilon$ d'intervalles non empiétants contenus dans δ_1, renferme une somme $> \varepsilon : 2$ d'intervalles contenus dans ce groupe. On est ramené au cas précédent et la proposition soulignée est établie.

La démonstration du lemme s'ensuit. Plaçons l'intervalle (a, b) en tête de la suite (1) : cet intervalle est privilégié. Donc il y a, dans la suite (1), un premier intervalle privilégié δ', puis un premier intervalle privilégié δ'' contenu dans δ', un premier

intervalle privilégié δ''' contenu dans δ'', etc. Ces intervalles emboîtés, en nombre infini, ont un point commun, par exemple la limite de leurs frontières gauches.

28. Théorème d'Osgood. — *Considérons une suite de fonctions continues*

$$f_1(x),\ f_2(x) \ldots\ f_n(x), \ldots$$

bornées dans leur ensemble, c'est-à-dire quels que soient n et x, quand x varie dans un intervalle (a, b). *Si cette suite tend vers une limite* $f(x)$ *continue dans le même intervalle, on a*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Remarquons que les différences $f - f_n$ sont continues et bornées et ont pour limite zéro ; ensuite que l'on a

$$\int_a^b (f - f_n)\, dx \leqq \int_a^b | f - f_n |\, dx.$$

Posons $\varphi_n = | f - f_n |$; le théorème sera établi si l'on prouve que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \varphi_n\, dx = 0,$$

sous la condition que la suite des fonctions positives, continues et bornées dans leur ensemble, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ tende vers zéro. Faisons donc cette démonstration.

Soit ε positif donné. Partageons (a, b) en parties égales, assez petites pour que l'oscillation de φ_n soit $< \frac{\varepsilon}{2}$ dans chacune d'elles, de sorte que le nombre de ces parties dépendra de n. Soit ω_n l'ensemble des parties en un point desquelles φ_n surpasse ε et aussi la somme des longueurs de ces parties. Je dis d'abord que ω_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. En effet, φ_n est $> \varepsilon : 2$ sur tout ω_n. Si ω_n ne tendait pas vers zéro, il y aurait une infinité d'indices pour lesquels ω_n surpasserait un nombre assignable $\omega > 0$. Si donc on écrit dans une suite illimitée :

$$(a, b),\ \delta_1,\ \delta_2, \ldots\ \delta_m, \ldots$$

l'intervalle (a, b), puis les intervalles qui composent ω_1, ceux qui composent $\omega_2, \ldots$, l'intervalle (a, b) de la suite serait privilégié au sens du lemme précédent. Donc il y aurait un point commun à une infinité d'intervalles δ ; en ce point, il y aurait une infinité de φ_n surpassant $\varepsilon : 2$ et φ_n n'aurait pas pour limite zéro. Donc ω_n tend vers zéro.

Ceci établi, soit μ la borne de tous les φ_n ; comme φ_n ne surpasse ε que sur une longueur $\leqslant \omega_n$, on a, par le théorème de la moyenne,

$$\int_a^b \varphi_n \, dx < \mu \omega_n + \varepsilon (b - a).$$

Quand n tend vers l'infini, cette intégrale tombe au-dessous de $\varepsilon (b - a)$ qui est aussi petit qu'on veut ; elle a donc pour limite zéro.

Corollaire. — *Le théorème précédent subsiste si la fonction limite $f(x)$, au lieu d'être partout continue, admet un nombre limité de points de discontinuité entre a et b.*

On peut admettre qu'il n'y ait qu'un seul point de discontinuité b. Alors le théorème est établi pour l'intervalle $(a, b - \varepsilon)$ quelque petit que soit ε. Mais f et f_n sont bornés dans tout (a, b), donc les intégrales de f et de f_n sont infiniment petites avec ε dans l'intervalle $(b - \varepsilon, b)$ et, par conséquent, le théoréme subsiste, à la limite, dans l'intervalle (a, b) tout entier.

CHAPITRE II

Intégration des différentielles exactes Intégrales curvilignes

§ 1. Intégration des différentielles totales exactes

29. Différentielles totales à deux variables indépendantes. — Soient x et y deux variables indépendantes, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions, continues et univoques ainsi que leurs dérivées partielles P'_y et Q'_x. On dit que l'expression $Pdx + Qdy$ est une *différentielle exacte* s'il existe une fonction u des deux variables x et y dont cette expression soit la différentielle totale, en sorte que l'on ait

$$(1) \qquad du = Pdx + Qdy.$$

En général, l'expression $Pdx+Qdy$ n'est pas une différentielle exacte. En effet, la relation (1) revient, par définition, aux deux suivantes :

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}.$$

Les seconds membres étant égaux (puisqu'on les suppose continus), on voit que $Pdx + Qdy$ ne peut être une différentielle exacte que si l'on a *identiquement*, c'est-à-dire x et y restant arbitraires et indépendants,

$$(2) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Cette condition est *nécessaire* pour que $Pdx + Qdy$ soit une différentielle exacte. J'ajoute qu'elle est aussi *suffisante* et, pour le prouver, je vais montrer que, si elle a lieu, l'intégrale u de l'équation (1) s'obtient par deux quadratures.

La fonction inconnue u est d'abord assujettie à la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y).$$

Soit a une constante choisie à volonté, l'intégrale définie

$$\int_a^x P(x, y)\,dx,$$

effectuée en considérant y comme une constante, est une solution particulière de cette équation. La solution générale s'obtient en lui ajoutant une constante arbitraire par rapport à x, c'est-à-dire une fonction arbitraire $\varphi(y)$. Nous poserons donc

$$(3) \qquad u = \int_a^x P(x, y)\,dx + \varphi(y).$$

Il reste à déterminer, si c'est possible, la fonction φ de manière à vérifier la seconde condition

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y),$$

c'est-à-dire, à cause de (3) et par règle de Leibniz,

$$\int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = Q(x, y).$$

Mais on a, en vertu de l'identité (2) supposée vérifiée,

$$\int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}\,dx = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = Q(x, y) - Q(a, y),$$

ce qui réduit la relation précédente à

$$\varphi'(y) = Q(a, y), \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(y) = \int Q(a, y)\,dy.$$

Enfin, en substituant cette valeur de φ dans (3), et en mettant en évidence la constante C comprise dans l'intégrale indéfinie, on trouve

$$(4) \qquad u = \int_a^x P(x, y)\,dx + \int Q(a, y)\,dy + C.$$

On voit donc que, si la condition (2) a lieu, l'équation (1) admet une infinité d'intégrales ne différant l'une de l'autre que par la valeur de la constante d'intégration C.

La constante a pouvant être prise à volonté, on la choisira, dans chaque cas particulier, de manière à simplifier autant que possible les intégrations.

Il est clair qu'on aurait pu procéder dans l'ordre inverse et commencer l'intégration par rapport à y. Alors, b désignant une constante choisie à volonté, on aurait obtenu

$$(5) \qquad u = \int_b^y Q(x, y)\, dy + \int P(x, b)\, dx + C.$$

Exemple. — L'expression

$$(3x^2 + 2y)dx + 2(x + y)dy$$

est une différenttelle exacte, car on a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2.$$

Calculons son intégrale en faisant $a = 0$ dans la formule (4), il vient

$$u = \int_0^x (3x^2 + 2y)\, dx + \int 2y\, dy = x^3 + 2xy + y^2 + C.$$

30. Remarque. — Les formules (4) et (5) supposent les fonctions P et Q continues et univoques ainsi que leurs dérivées premières pour tous les systèmes de valeurs de x, y qui interviennent dans les formules. Si ces conditions sont réalisées dans tout le plan, il n'y a aucune difficulté. Plus généralement, si elles sont réalisées dans le rectangle R compris entre les abscisses a_1 et a_2, les ordonnées b_1 et b_2, la formule (4) est applicable dans ce rectangle à condition de choisir a entre a_1 et a_2, et la formule (5) à condition de choisir b entre b_1 et b_2. En effet, tous les systèmes de valeurs de x, y à considérer dans ces formules, restent alors compris dans le rectangle R.

Ces formules mettent en évidence que, pour chaque valeur de la constante arbitraire C, *l'intégrale u est une fonction continue et univoque de x et de y dans le rectangle* R où ces conditions sont réalisées.

31. Cas de trois variables indépendantes. — La méthode précédente s'étend à un nombre quelconque de variables indépendantes, mais il suffira de développer les calculs pour trois variables. Soient P, Q, R trois fonctions de x, y, z, continues ainsi que leurs dérivées premières. On dit que l'expression

$$\text{(6)} \qquad P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

est une *différentielle exacte*, s'il existe une fonction u des trois variables x, y, z dont elle soit la différentielle totale. Il faut pour cela que u satisfasse aux trois équations :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

Comme les dérivées secondes (supposées continues) sont indépendantes de l'ordre dans lequel on effectue les dérivations, on obtient *trois conditions nécessaires* pour que l'expression proposée soit une différentielle exacte, à savoir :

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Ces conditions sont aussi *suffisantes*, car nous allons montrer que si elles ont lieu, l'intégrale u de l'expression (6) s'obtiendra par des quadratures.

En effet, cette intégrale a d'abord P comme dérivée par rapport à x, donc elle est comprise dans la formule générale

$$\text{(8)} \qquad u = \int_a^x P(x, y, z)\,dx + \varphi(y, z),$$

où a est une constante choisie à volonté, et φ une fonction arbitraire de y et z.

Pour que u ait l'expression (6) pour différentielle totale, il faut encore que l'on ait

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz = Q\,dy + R\,dz.$$

Mais on a, par la règle de Leibniz et en observant que P'_y, étant identique à Q'_x, s'intègre immédiatement,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z) - Q(a, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

De même,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z) - R(a, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Par ces relations, l'équation (9) se réduit à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi = Q(a, y, z) dy + R(a, y, z) dz.$$

Donc la détermination de φ dépend de l'intégration d'une expression différentielle à deux variables. La condition d'intégrabilité est vérifiée en vertu des équations (7). Donc φ se détermine par la méthode établie précédemment (n° 29). En désignant par b une nouvelle constante choisie à volonté, et en remplaçant dans (8) φ par sa valeur, on voit que l'expression (6) admet une infinité d'intégrales, comprises dans la formule générale, comportant une constante arbitraire,

$$u = \int_a^x P(x, y, z)\, dx + \int_b^y Q(a, y, z)\, dy + \int R(a, b, z)\, dz.$$

Les conditions de continuité supposées dans la démonstration précédente appellent évidemment une remarque analogue à celle du n° 30.

§ 2. Fonctions à variation bornée Courbes rectifiables

32. Définition des fonctions à variation bornée. — Soit $y = f(x)$ une fonction de x, univoque et bornée dans un intervalle fini (a, b). Donnons à x une suite de valeurs croissantes $x_1 = a, x_2, x_3, \ldots x_n, x_{n+1} = b$; soient $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ les valeurs correspondantes de y. Faisons la somme des différences successives de y ; nous aurons

$$(1) \qquad \sum_1^n (y_{k+1} - y_k) = y_{n+1} - y_1 = p - n,$$

p désignant la somme des différences positives et $-n$ celle des différences négatives. Désignons encore par t la somme des différences absolues

$$(2) \qquad t = \sum_1^n |y_{k+1} - y_k| = p + n.$$

Les valeurs extrêmes a et b restant fixes, les trois sommes p, n, t dépendent du nombre et de la position des valeurs intermédiaires. Faisons varier ces deux éléments de toutes les manières possibles ; si l'une des trois sommes est bornée, les deux autres le seront aussi, en vertu des équations (1) et (2). Quand il en sera ainsi, nous dirons que $f(x)$ est *une fonction à variation bornée dans l'intervalle* (a, b) (C. Jordan).

Dans cette hypothèse, on peut choisir succesivement les points intermédiaires de manière que p s'approche indéfiniment de sa borne supérieure P. Les équations (1) et (2) montrent que n et t tendront, en même temps, vers leurs bornes supérieures N et T, ces équations elles-mêmes deviendront, à la limite,

$$f(b) - f(a) = y_{n+1} - y_1 = \mathrm{P} - \mathrm{N}, \qquad \mathrm{T} = \mathrm{P} + \mathrm{N}.$$

Cette dernière quantiné T s'appelle la *variation totale* de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). Les deux quantités P et $-$ N sont respectivement les *variations positive* et *négative* de $f(x)$ dans le même intervalle.

Théorème. — *Si $f(x)$ est à variation bornée dans l'intervalle (a, b) et que l'on divise cet intervalle en deux autres par un point intermédiaire c, la variation totale* T *de $f(x)$ dans (a, b) est la somme des variations totales,* T_1 *et* T_2, *de $f(x)$ dans (a, c) et dans (c, b).*

On peut, par définition, former une somme t relative à l'intervalle (a, b) et infiniment voisine de T ; et l'on peut supposer que c soit pris comme point de subdivsion. En effet, si c tombait entre deux points de subdivision x_i et x_{i+1}, on ajouterait le point de subdivision c et la somme t augmenterait, car le terme $|y_{i+1} - y_i|$ serait remplacé par une somme au moins égale

$$|y_{i+1} - f(c)| + |f(c) - y_i|.$$

Or, quand c est un point de subdivision, t résulte de l'addition des deux sommes partielles analogues, t_1 et t_2, relatives aux deux intervalles (a, c) et (c, b). On a $t_1 + t_2 = t$, donc $T_1 + T_2 \geqslant t$ et, à la limite, $T_1 + T_2 \geqslant T$.

Réciproquement, toute somme $t_1 + t_2$ est une somme t, donc $\leqslant T$. Ainsi t_1 et t_2 sont bornés et $f(x)$ est à variation bornée dans (a, c) et dans (c, b). Alors on peut faire tendre t_1 et t_2 vers leurs bornes T_1 et T_2, et il vient, à la limite, $T_1 + T_2 \leqslant T$. De la comparaison des deux résultats, on conclut $T_1 + T_2 = T$.

Le théorème précédent prouve que, si une fonction $f(x)$ est à variation bornée dans un intervalle (a, b), elle est aussi à variation bornée dans toute partie de cet intervalle. Il s'ensuit que la variation totale t de f dans l'intervalle variable (a, x) est une fonction non décroissante de x. Le même raisonnement prouve que les fonctions P et N relatives à l'intervalle variable (a, x) sont aussi des fonctions non décroissantes de x.

33. Propriétés des fonctions à variation bornée. — I. *Une fonction à variation bornée, $y = f(x)$, est la différence de deux fonctions bornées, positives et non décroissantes dans l'intervalle (a, b). Réciproquement, la différence de deux fonctions bornées et non décroissantes est une fonction à variation bornée.*

Soit y_1 la valeur de y au point a ; on a, les variations P et — N se rapportant à l'intervalle (a, x),

$$y = (y_1 + P) - N.$$

Donc y est la différence de denx fonctions de x bornées et non décroissantes. On peut faire en sorte que ces deux fonctions soient positives et même *essentiellement croissantes* ; il suffit, en effet, d'ajouter aux deux termes de cette différence une même quantité croissante et suffisamment grande, par exemple, la quantité

$$|y_1| + (x - a).$$

Réciproquement, si z et u sont deux fonctions de x bornées et non décroissantes, la fonction $z - u$ est à variation bornée. En effet, la différence des valeurs de $z - u$ pour deux valeurs

x_k et x_{k+1} de x est au plus égale à la somme des accroissements de z et de u dans cet intervalle. Donc la somme de toutes ces différences entre deux valeurs extrêmes de x ne peut surpasser la somme des accroissements de z et de u entre les mêmes valeurs, et $z - u$ est à variation bornée.

II. *La somme, la différence et le produit de deux fonctions à variation bornée sont des fonctions de même nature. L'inverse* $1 : y$ *d'une fonction à variation bornée sera aussi de même nature, pourvu que* $|y|$ *reste supérieur à un nombre positif fixe.*

La première partie du théorème se démontre immédiatement en considérant les deux fonctions y et y' comme les différences $z - u$ et $z' - u'$ de deux fonctions positives non décroissantes. On a, en effet,

$$y + y' = (z + z') - (u + u'), \qquad y - y' = (z + u') - (u + z'),$$
$$yy' = (zz' + uu') - (zu' + uz').$$

La dernière partie du théorème se vérifie facilement aussi, en observant que, si $|y|$ est $> \mu$, la somme :

$$t = \Sigma \left| \frac{1}{y_{k+1}} - \frac{1}{y_k} \right| = \Sigma \frac{|y_{k+1} - y_k|}{|y_k y_{k+1}|} < \frac{1}{\mu^2} \Sigma |y_{k+1} - y_k|$$

reste toujours inférieure à un nombre fixe.

III. *Si la fonction* $f(x)$ *à variation bornée est, de plus, continue en un point (ou dans un intervalle), ses trois variations* $T(x)$, $P(x)$, $N(x)$ *dans l'intervalle* (a, x), *sont des fonctions de* x *continues en ce point (ou dans cet intervalle).*

Supposons, pour fixer les idées, que $f(x)$ soit continue à droite du point b. Si $P(x)$ ou $N(x)$ est discontinue à droite du même point, l'oscillation ω, à droite du point b, de ces deux fonctions croissantes sera la même, puisque la différence des deux fonctions est continue. Définissons deux fonctions $P_1(x)$ et $N_1(x)$ comme étant respectivement égales à P et à N pour $x \le b$ et à $P - \omega$, $N - \omega$ pour $x > b$. Ces deux nouvelles fonctions seront encore non décroissantes, nulles pour $x = a$ et telles que l'on ait

$$f(x) - f(a) = P_1(x) - N_1(x).$$

Mais les variations totales de P_1 et N_1 dans (a, x) sont égales aux fonctions elles-mêmes P_1 et N_1 ; d'autre part, la variation totale d'une différence ne peut évidemment surpasser la somme des variations totales de chaque terme ; il vient donc, pour $x > b$,

$$T(x) \leq P_1(x) + N_1(x) = P(x) + N(x) - 2\omega.$$

Or, $T = P + N$, donc $\omega = 0$. Alors, P, N et, par suite, T sont continues à droite du point b.

Il résulte de ce théorème que *toute fonction continue à variation bornée est la différence de deux fonctions continues non décroissantes. Elle est donc aussi la différence de deux fonctions continues essentiellement croissantes.*

IV. *Les fonctions à variation bornée sont susceptibles d'intégration.* Toute la théorie de l'intégrale définie qui a été exposée dans le premier volume leur est applicable, et, en particulier, la définition. Si $f(x)$ est à variation bornée dans un intervalle (a, b) et que l'on divise cet intervalle en parties consécutives d'amplitudes δ_i, où la fonction admet les bornes m_i et M_i $(i = 1, 2... n)$, l'intégrale de $f(x)\,dx$ dans (a, b) est intermédiaire entre les deux sommes $\Sigma m_i\delta_i$, $\Sigma M_i\delta_i$ étendues à tous les intervalles δ_i, et est leur limite commune quand ces intervalles tendent vers 0.

En effet, si l'on se reporte aux raisonnements du premier volume, on voit que le seul appel qui y soit fait à la continuité supposée de la fonction $f(x)$ sert à prouver que la différence $\Sigma(M_i - m_i)\,\delta_i$ des deux sommes a pour limite zéro. Ce résultat découle aussi bien de l'hypothèse que $f(x)$ soit à variation bornée.

Soit, en effet, $T(x)$ sa variation totale dans l'intervalle (a, x) ; l'oscillation $M_i - m_i$ dans δ_i ne surpasse pas la variation totale $T(x_{i+1}) - T(x_i)$ dans le même intervalle, donc, si toutes les amplitudes δ_i sont $< \delta$, on a

$$\Sigma(M_i - m_i)\,\delta_i < \delta\Sigma\Big[T(x_{i+1}) - T(x_i)\Big] = \delta\Big[T(b) - T(a)\Big]$$

et cette quantité est aussi petite que l'on veut avec δ.

34. Courbes rectifiables. — Considérons une courbe plane définie par les deux équations :

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

où φ et ψ sont des fonctions continues de t, ne se réduisant pas simultanément à des constantes.

Donnons à t une suite de valeurs $t_1, t_2, \ldots t_n, t_{n+1} = T$. Soient, en général, x_i, y_i les valeurs de x, y pour $t = t_i$. Le périmètre p du polygone inscrit ayant ces points pour sommets, sera

$$p = \sum_1^n \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}.$$

Faisons tendre vers zéro les amplitudes de tous les intervalles $(t_{i+1} - t_i)$. Si le périmètre du polygone ainsi construit tend vers une limite déterminée et unique, quel que soit le mode de subdivision de l'intervalle (t_1, T) en parties infiniment petites, l'arc correspondant de la courbe est *rectifiable* et *la longueur de l'arc* est égale à cette limite.

Pour que cette limite existe, il faut d'abord que le périmètre considéré ne croisse pas indéfiniment. Or le côté $t_i\, t_{i+1}$ est au moins égal à $|x_{i+1} - x_i|$ et à $|y_{i+1} - y_i|$, mais ne peut surpasser la somme de ces quantités. Pour que le périmètre reste fini, il est donc nécessaire et suffisant que les deux sommes

$$\sum_1^n |x_{i+1} - x_i| \qquad \text{et} \qquad \sum_1^n |y_{i+1} - y_i|$$

soient bornées et, par suite, que $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ soient des fonctions à variation bornée dans l'intervalle (t_1, T).

Cette condition nécessaire pour que l'arc soit rectifiable est aussi suffisante. En effet, supposons-la vérifiée et désignons par S la borne supérieure des périmètres de tous les polygones possibles. Nous allons montrer que le périmètre du polygone $t_1\, t_2 \ldots t_{n+1}$ tend vers S quand l'amplitude de tous les intervalles tend vers zéro.

Pour établir ce théorème, on observe que le périmètre p reste stationnaire ou augmente quand on intercale un nouveau sommet entre t_k et t_{k+1}, mais que cette augmentation, ne pouvant surpasser la somme des deux nouveaux côtés, est infé-

rieure au double de la somme des oscillations de x et de y dans l'intervalle (t_k, t_{k+1}).

Ceci posé, commençons par inscrire un polygone auxiliaire π' dont le périmètre p' soit $> S - \varepsilon$, ce qui est possible par définition de S, et soit ν le nombre des sommets. Soit π le polygone inscrit de périmètre p, dont les sommets soient de paramètres $t_1, t_2, \ldots$ suffisamment voisins pour que la somme des oscillations de φ et ψ soit $< \varepsilon : 2\nu$ dans chaque intervalle $t_k\, t_{k+1}$. Nous allons montrer que la différence $S - p$ est aussi petite que l'on veut avec ε. A cet effet, formons un troisième polygone π'' de périmètre p'', ayant tous les sommets de π et de π'. Comme π'' se construit par l'addition de ν nouveaux sommets à π, et que l'accroissement du périmètre est au plus de $\varepsilon : \nu$ par nouveau sommet, on a $p'' < p + \varepsilon$. D'autre part, π'' provient aussi de l'addition de nouveaux sommets à π' de sorte que $p'' > p' > S - \varepsilon$. On a, en définitive,

$$p + \varepsilon > p'' > S - \varepsilon, \qquad \text{d'où} \qquad p > S - 2\varepsilon.$$

Donc p qui est $< S$, en diffère aussi peu qu'on voudra à condition de rendre ε (donc les intervalles $t_k\, t_{k+1}$) suffisamment petits.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe continue décrite par un point dont les coordonnées sont des fonctions de t, soit rectifiable, est que ces fonctions soient à variation bornée (C. Jordan).

L'arc d'une courbe rectifiable possède les propriétés suivantes :

1° *Si l'on partage un arc en plusieurs parties, la longueur totale est égale à la somme des longueurs de chaque partie.*

On s'en assure par la considération des polygones inscrits dans chaque partie et dont l'ensemble est inscrit dans l'arc total.

2° *La longueur s d'un arc, comptée d'un point fixe t_1 à un point mobile t, est une fonction continue et croissante de t.*

L'arc varie en croissant à cause de la propriété précédente et sa continuité résulte de celle de la variation totale d'une fonction continue. En effet, le raisonnement fait au début montre que la longueur de l'arc dans l'intervalle $(t, t + \Delta t)$

est inférieure à la somme des variations totales de x et y dans le même intervalle, donc elle est aussi petite qu'on veut avec Δt.

3° *Réciproquement, t est une fonction continue et croissante de s. Les coordonnées x et y, qui sont fonctions continues de t, peuvent donc toujours être considérées comme fonctions continues de s.*

Ces définitions et ces propriétés s'étendent d'elles-mêmes aux courbes de l'espace.

§ 3. Intégrales curvilignes qui ne dépendent que de leurs limites

35. Intégrales curvilignes. — Soient P et Q deux fonctions continues et univoques de x et y dans une aire D à contour simple. L'intégrale curviligne,

$$\int_{L} P\,dx + Q\,dy,$$

effectuée sur une ligne tracée dans l'aire D, a été définie dans le premier volume moyennant certaines restrictions imposées à cette ligne. Nous allons faire disparaître ces restrictions et étendre la définition de l'intégrale à toute courbe rectifiable.

Considérons une représentation paramétrique de la ligne L. Soient $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ deux fonctions continues de t ne se réduisant pas simultanément à des constantes, et supposons que le point

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

décrive la ligne L quand t varie de t_1 à T. Cette ligne est supposée rectifiable. Soient S sa longueur totale, s sa longueur variable entre les points t_1 et t. Pour définir l'intégrale curviligne, divisons l'arc L en segments consécutifs par les points $t_1, t_2, \ldots t_k, \ldots t_n$, $t_{n+1} = \mathrm{T}$. Désignons par $x_k, y_k, \mathrm{P}_k, \ldots$ les valeurs des fonctions x, y, $\mathrm{P}(x, y), \ldots$ au point t_k. Faisons tendre tous les segments, c'est-à-dire tous les intervalles $t_k\, t_{k+1}$, vers zéro ; les intégrales curvilignes sur L sont définies par les limites de sommes :

$$\lim \sum_{1}^{n} \mathrm{P}_k (x_{k+1} - x_k) = \int_{L} \mathrm{P}\,dx,$$

$$\lim \sum_{1}^{n} \mathrm{Q}_k (y_{k+1} - y_k) = \int_{L} \mathrm{Q}\,dy.$$

Mais il faut prouver l'existence de ces limites, et c'est ce que nous allons faire en les ramenant à des intégrales définies ordinaires. Il suffit de faire le raisonnement pour la première somme.

La courbe étant rectifiable, on peut mettre x sous la forme, $u - v$, de deux fonctions de t continues et essentiellement croissantes. On posera, par exemple,

$$u = 2s, \qquad v = 2s - x,$$

auquel cas u et v croissent plus rapidement que s. Il vient ainsi, u_k et v_k se rapportant au point t_k,

$$\sum_1^n \mathrm{P}_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_1^n \mathrm{P}_k(u_{k+1} - u_k) - \sum_1^n \mathrm{P}_k(v_{k+1} - v_k).$$

Mais u et v sont fonctions continues et croissantes de t ; alors, réciproquement, t est fonction continue et croissante de u ou de v à volonté. Il s'ensuit que x, y et, par conséquent, P sont aussi fonctions continues soit de u dans l'intervalle (u_1, U) soit de v dans l'intervalle (v_1, V).

Considérons le second membre de la dernière équation ; prenons u comme variable indépendante dans le premier terme, et v dans le second ; il vient, par la définition même de l'intégrale définie,

$$\lim \sum_1^n \mathrm{P}_k(x_{k+1} - x_k) = \int_{u_1}^{\mathrm{U}} \mathrm{P}\, du - \int_{v_1}^{\mathrm{V}} \mathrm{P}\, dv.$$

C'est le résultat annoncé.

En particulier, si x et y sont des fonctions de t, continues ainsi que leurs dérivées premières dans l'intervalle (t_1, T), s, u et v jouissent de la même propriété. On peut prendre t comme variable d'intégration et l'on a

$$\int_{\mathrm{L}} \mathrm{P} dx = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} \mathrm{P}(u' - v')\, dt = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} \mathrm{P}x'\, dt\ ;$$

de même,

$$\int_{\mathrm{L}} \mathrm{Q}\, dy = \int_{t_1}^{\mathrm{T}} \mathrm{Q}\, y'\, dt.$$

36. Lemme. — *La ligne d'intégration L étant tracée dans l'aire D, on peut lui inscrire un polygone π tel que l'intégrale sur L diffère aussi peu que l'on veut de l'intégrale sur π. Il suffit pour cela que les côtés du polygone soient suffisamment petits.*

Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour chacune des intégrales de $P\,dx$ et de $Q\,dy$. Considérons seulement la première, la démonstration se faisant de la même manière pour l'autre.

Soient S la longueur de la ligne d'intégration, m_1 et M ses extrémités. Inscrivons un polygone ayant pour sommets les points $m_1, m_2, \dots m_n$ et M. Soient x_i et P_i les valeurs de x et de P au point m_i; c_i le côté $m_i m_{i+1}$ et aussi la longueur de ce côté. Soit ε un nombre positif arbitraire; on peut prendre tous les côtés c_i assez petits pour que l'oscillation de la fonction continue P soit $< \varepsilon$ sur chaque côté et pour que la différence entre $\sum_i (x_{i+1} - x_i) P_i$ et sa limite $\int_L P\,dx$ soit aussi $< \varepsilon$. Ceci fait, on a

$$\int_\pi P\,dx = \sum_i \int_{c_i} P\,dx,$$

ce qui peut s'écrire

$$\int_\pi P\,dx = \sum_i (x_{i+1} - x_i) P_i + \sum_i \int_{c_i} (P - P_i)\,dx.$$

Cette relation prouve le théorème, car, si l'on porte son attention sur le second membre, la première somme diffère de moins de ε de $\int_L P\,dx$, tandis que la seconde, qui est moindre en valeur absolue que $\varepsilon \Sigma c_i$ et *a fortiori* que εS, est aussi petite que l'on veut avec ε.

37. Intégrales curvilignes qui ne dépendent que de leurs limites. — En général, l'intégrale curviligne effectuée sur une ligne L, tracée dans le plan xy et allant du point (x_1, y_1) au point (X, Y), dépend non seulement de ces deux points, mais aussi du tracé de la ligne. Si l'intégrale ne dépend que des extrémités de la ligne d'intégration et du sens du parcours, il est naturel de faire apparaître cette propriété par une nota-

tion analogue à celle des intégrales ordinaires : l'intégrale effectuée de (x_1, y_1) à (X, Y) sur une ligne arbitraire se désigne alors par

$$\int_{x_1, y_1}^{X, Y} P\,dx + Q\,dy$$

et l'on dit que l'*intégrale curviligne ne dépend que de ses limites.*

Les intégrales qui ne dépendent que de leurs limites ne sont autres que celles des différentielles totales exactes, ainsi qu'il résulte des propositions suivantes :

THÉORÈME. — *Si* $P\,dx + Q\,dy$ *est la différentielle totale d'une fonction* $F(x, y)$ *supposée univoque dans l'aire* D, *l'intégrale de* $P\,dx + Q\,dy$ *ne dépend que de ses limites sur toute ligne de l'aire* D *et elle est égale à l'accroissement de* F *entre les extrémités de la ligne d'intégration.*

L'intégrale sur une ligne quelconque étant la limite de celle sur une ligne polygonale en vertu du lemme précédent, il suffit de prouver le théorème pour toute ligne polygonale.

Or, sur une ligne polygonale π, on peut considérer x et y comme des fonctions continues d'une variable t qui varie de t_1 à T, ces fonctions admettant des dérivées continues, sauf aux sommets du polygone où elles restent toujours bornées. On peut alors prendre t comme variable d'intégration et il vient

$$\int_\pi P\,dx + Q\,dy = \int_{t_1}^{T}\left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt}\right)dt = \int_{t_1}^{T}\frac{dF}{dt}\,dt.$$

Par conséquent, x_1, y_1 et X, Y étant les coordonnées des extrémités, il vient

$$\int_\pi P\,dx + Q\,dy = F(X, Y) - F(x_1, y_1),$$

ce qui prouve le théorème.

THÉORÈME. — *Quand elle ne dépend que de ses limites dans l'aire* D, *l'intégrale de* $P\,dx + Q\,dy$, *effectuée entre un point fixe* x_1, y_1 *et un point variable* x, y, *est une fonction univoque de* x, y, *ayant pour différentielle totale* $P\,dx + Q\,dy$, *ou pour dérivées partielles* P *et* Q.

Désignons par x_1, y_1 le point fixe, par X, Y le point variable. Soit alors

$$F(X, Y) = \int_{x_1, y_1}^{X, Y} P\,dx + Q\,dy.$$

Cette fonction F est univoque par hypothèse ; il reste à montrer qu'elle a pour dérivées partielles P et Q.

Laissons Y fixe et donnons à X un accroissement infiniment petit $\Delta X = h$. Calculons la nouvelle intégrale sur un polygone ayant pour dernier côté la droite menée du point (X, Y) à $(X+h, Y)$. L'accroissement ΔF se réduit alors à l'intégrale sur ce dernier côté où y est constant et dy nul, c'est-à-dire à l'intégrale définie ordinaire

$$\Delta F = \int_X^{X+h} P(x, Y)\,dx.$$

On en déduit $\Delta F = P(X + \theta h)\,\Delta X$ par le théorème de la moyenne, et, par conséquent,

$$F'_X = \lim \frac{\Delta F}{\Delta X} = P(X, Y); \qquad \text{de même,} \qquad F'_Y = Q.$$

En rapprochant les deux théorèmes précédents, on voit que l'on peut énoncer la conclusion suivante :

Théorème. — *Si P et Q sont des fonctions continues et univoques de x et de y dans l'aire D, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de $P\,dx + Q\,dy$ ne dépende que de ses limites dans l'intérieur de D, est que $P\,dx + Q\,dy$ soit la différentielle totale d'une fonction univoque de cette aire.*

Nous allons maintenant chercher des conditions seulement suffisantes, mais que l'on puisse vérifier directement connaissant les fonctions P et Q.

38. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de $P\,dx + Q\,dy$ ne dépende que de ses limites dans l'aire D, est qu'elle soit nulle sur tout contour fermé C tracé dans D. Il suffit d'ailleurs pour cela qu'elle soit nulle*

sur tout contour triangulaire, et même sur tout contour triangulaire supposé aussi petit qu'on le voudra.

Soient L et L_1 deux lignes ayant les mêmes extrémités, L_1^{-1} la ligne L_1 parcourue en sens contraire. Le parcours LL_1^{-1} est fermé et l'on a

$$\int_L - \int_{L_1} = \int_{LL_1^{-1}}.$$

Donc, si les intégrales sur L et sur L_1 sont égales, celle sur le contour fermé LL_1^{-1} est nulle, et réciproquement, ce qui prouve la première partie du théorème.

Je dis maintenant que, pour que l'intégrale soit nulle sur tout contour fermé, il suffit qu'elle le soit sur tout contour triangulaire. En effet, l'intégrale sur le contour fermé est la limite de celle sur un polygone fermé π. Pour que l'intégrale soit nulle sur π, il suffit qu'elle le soit sur tout contour triangulaire suffisamment petit. En effet, si le contour polygonal π est simple (ne se coupe pas), on peut, par des lignes auxiliaires, décomposer l'aire intérieure à π en un réseau de triangles aussi petits qu'on le désire. Sommons les intégrales effectuées sur les contours de tous les triangles; les intégrales sur les lignes auxiliaires se détruisent, car ces lignes sont parcourues deux fois en sens contraires. La somme se réduit donc à l'intégrale effectuée sur le contour polygonal extérieur, laquelle s'annule avec les intégrales sur les triangles.

Si le contour polygonal π se coupe, il est formé par la juxtaposition de plusieurs contours simples et l'on est ramené au cas précédent.

39. Théorème. — *Si P et Q et leurs dérivées partielles P'_y et Q'_x sont des fonctions continues et univoques de x et y dans l'aire D, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de $P\,dx + Q\,dy$ ne dépende que de ses limites sur toute ligne tracée dans l'intérieur de l'aire D est que l'on ait l'identité $P'_y = Q'_x$ dans l'intérieur de cette aire.*

La condition est nécessaire en vertu du théorème du n° 29. Il reste à prouver qu'elle est suffisante.

Cette conclusion se tire immédiatement de la formule de Green. Il suffit, d'après le lemme précédent, de montrer que l'intégrale de $P\,dx + Q\,dy$ est nulle sur tout triangle C tracé dans l'aire D. Soit A l'aire intérieure au triangle. Il vient, par la formule de Green, $Q'_x - P'_y$ étant nul,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = 0,$$

ce qui prouve la proposition.

Nous allons indiquer maintenant un autre théorème analogue qui ne suppose pas la continuité des dérivées partielles. Il s'appuie sur le lemme suivant :

40. Lemme. — *Supposons* $P(x, y)$ *et* $Q(x, y)$ *différentiables dans un domaine* D *et sur le bord, celui-ci formé par hypothèse d'un contour unique* C. *Soit alors* ω *un nombre positif donné. Je dis qu'on peut décomposer* D *en carrés (ou morceaux de carrés sur le bord), tous aussi petits qu'on veut (mais non pas supposés égaux), de telle façon qu'il existe dans chaque élément (carré ou morceau de carré) un point au moins* (ξ, η) *tel qu'on aït, pour chaque point* (x, y) *du même élément, les deux relations simultanées :*

$$P(x, y) - P(\xi, \eta) = \frac{\partial P}{\partial \xi}(x - \xi) + \frac{\partial P}{\partial \eta}(y - \eta) + \varepsilon\rho,$$

$$Q(x, y) - Q(\xi, \eta) = \frac{\partial Q}{\partial \xi}(x - \xi) + \frac{\partial Q}{\partial \eta}(y - \eta) + \varepsilon'\rho,$$

où l'on suppose

$$\rho = |\xi - x| + |\eta - y|, \qquad |\varepsilon| < \omega, \qquad |\varepsilon'| < \omega.$$

Pour le prouver par l'absurde, supposons que, ω étant donné, il soit impossible de satisfaire à ces conditions. Partageons D en un réseau de petits carrés (sauf la restriction déjà indiquée pour le bord) : il y aura au moins un de ces carrés où les conditions seront encore irréalisables. S'il y en avait plusieurs, fixons le choix de l'un d'eux par une loi. Subdivisons ce carré en d'autres plus petits et continuons ainsi de suite ; nous prouvons par le raisonnement connu qu'il existe

au moins un point (ξ, η) de D, compris dans un carré aussi petit qu'on veut où les conditions sont irréalisables. Ceci est absurde, car P et Q étant différentiables au point (ξ, η), les conditions sont réalisées dans tout carré suffisamment petit contenant ce point (sans qu'il soit même besoin de subdiviser ce carré).

41. Théorème. — *Si* P *et* Q *sont des fonctions continues, univoques et* DIFFÉRENTIABLES *de x et y dans l'aire* D, *la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de* $P\,dx + Q\,dy$ *ne dépende que de ses limites sur une ligne quelconque tracée à l'intérieur de l'aire* D, *est que l'on ait l'identité* $P'_y = Q'_x$ *à l'intérieur de cette aire.*

Il suffit, comme au n° 39, de démontrer que cette condition est suffisante, et cela pour un contour triangulaire.

Prouvons donc que, si l'on a dans un triangle T la relation $P'_y = Q'_x$, l'intégrale de $P\,dx + Q\,dy$ est nulle sur le contour du triangle. Décomposons le triangle en carrés de manière à réaliser la condition du lemme précédent. Considérons l'un de ces éléments. S'il est intérieur au triangle, c'est un carré de côté α, de périmètre 4α et d'aire α^2. S'il est sur le bord, c'est une portion convexe d'un carré de côté α, son aire est $< \alpha^2$ et son périmètre $< 4\alpha$.

Intégrons $P\,dx$ sur le contour γ de cet élément. En décomposant $P\,dx$ par la formule du lemme précédent et en observant que l'intégrale de $\left[P(\xi, \eta) + \frac{\partial P}{\partial \xi}(x - \xi)\right] dx$ est nulle, car c'est celle d'une différentielle exacte, il vient

$$\int_\gamma P(x, y)\,dx = \frac{\partial P}{\partial \eta}\int_\gamma y\,dx + \int_\gamma \varepsilon\rho\,dx,$$

où l'on a, par le théorème de la moyenne,

$$\int_\gamma \varepsilon\rho\,dx < 4\alpha^2\omega,$$

car $|\varepsilon|$ est $< \omega$, ensuite $|\rho| < 2\alpha$ et x décrit au plus deux intervalles d'amplitude α.

On a, de même,

$$\int_\gamma Q(x,y)\,dx = \frac{\partial Q}{\partial \xi}\int_\gamma x\,dy + \int_\gamma \varepsilon'\rho\,dy.$$

$$\left|\int_\gamma \varepsilon'\rho\,dy\right| < 4\alpha^2\omega.$$

Ajoutons membre à membre ces deux équations. Au second membre, $\int x\,dy$ et $\int y\,dx$ ont, par hypothèse, le même coefficient et leur somme est nulle, car c'est l'intégrale de la différentielle exacte $d(xy)$. Il vient donc $(-1 < \theta < 1)$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\gamma \varepsilon\rho\,dx + \int_\gamma \varepsilon'\rho\,dy = 8\theta\omega\alpha^2.$$

Sommons maintenant pour tous les éléments du triangle, il vient, l'intégration se faisant sur le contour du triangle T,

$$\int_T P\,dx + Q\,dy = 8\theta\omega\Sigma\alpha^2 \qquad (-1 < \theta < 1).$$

Le second membre est aussi petit qu'on veut avec ω, car la somme $\Sigma\alpha^2$ des aires de tous les carrés surpasse aussi peu qu'on veut celle du triangle T. Donc le premier membre ne peut différer de 0, et l'intégrale est nulle sur le contour triangulaire.

42. Extension à un nombre quelconque de variables. — Les propositions des n°s 36 et 38 s'étendent d'elles-mêmes à un nombre quelconque de variables indépendantes. Toute l'analyse précédente se généralise alors aisément. Pour plus de facilité, considérons seulement le cas de trois variables.

Soient P, Q, R trois fonctions continues et univoques de x, y, z, *admettant les dérivées partielles premières :* P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z, R'_x, R'_y, *continues* dans un domaine D. Ce domaine D peut être limité par une ou plusieurs surfaces, mais on le suppose tel, que tout contour fermé qu'on y trace puisse se réduire à un point unique par une déformation continue sans sortir de D. (Dans le cas de deux variables, c'est la simplicité du contour de l'aire qui assurait cette condition).

On a alors le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *soit la différentielle totale d'une fonction univoque* $F(x, y, z)$ *dans* D, *ou pour que l'intégrale curviligne*

$$\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

ne dépende que de ses limites dans D, *est que l'on ait, dans ce domaine,*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Dans ce cas, $F(x, y, z)$ *sera exprimée, à une constante près, par l'intégrale curviligne*

$$\int_{x_1, y_1, z_1}^{x, y, z} P\,dx + Q\,dx + R\,dz,$$

effectuée sur un chemin arbitraire entre un point fixe et un point variable du domaine D.

Le théorème précédent subsiste sans faire d'hypothèses sur la continuité des dérivées partielles, mais *à condition d'admettre la différentiabilité des trois fonctions* P, Q, R.

Tout revient, en effet, pour justifier ces conclusions, à montrer que l'intégrale de $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ est nulle sur un contour triangulaire aussi petit qu'on veut, donc tout entier dans le domaine D. Or on peut, dans le plan de ce triangle, considérer x, y, z comme des fonctions linéaires de deux variables u, v, ce qui ramène l'expression $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ à la forme $A\,du + B\,dv$, qui contient deux variables seulement et satisfait aux conditions des théorèmes précédents. On s'en assure en formant les expressions de A et de B.

EXERCICES

I. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de surface,

$$(1) \qquad \iint_S A\,dy\,dx + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy,$$

ne dépende que du contour L de la surface S et non de la forme de celle-ci ?

R. Il faut que l'intégrale soit nulle sur toute surface fermée S. Soit V le volume compris dans S supposée fermée ; l'intégrale de surface revient par la formule de Green à l'intégrale triple

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Cette intégrale devant s'annuler quel que soit V, la condition cherchée est

$$(2) \qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

2. Montrer que si l'intégrale de surface (1) ne dépend que du contour L de S, elle se ramène à une intégrale curviligne sur L.

R. La condition (2) ayant lieu, il est possible de déterminer trois fonctions P, Q, R par les relations

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = A, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = B, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C.$$

On y satisfait, par exemple, en posant

$$P = \int_{z_0}^{z} B\, dz + \int C(x, y, z_0)\, dy, \qquad Q = -\int_{z_0}^{z} A\, dz, \qquad R = 0.$$

L'intégrale de surface se transforme alors par la formule de Stokes (t. I, n° 304) dans l'intégrale curviligne

$$(3) \qquad \int_L P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Ce résultat permet de généraliser la notion des différentielles exactes. On dit (Poincaré) que l'équation (2) exprime la condition pour que (1) soit une intégrale de différentielle exacte. Dans ce cas, en effet, l'intégrale *double* (1) se ramène à l'intégrale *simple* (3). Cette généralisation peut s'étendre à un nombre quelconque de variables.

CHAPITRE III

Intégrales Eulériennes

---

§ 1. Expressions des fonctions circulaires et hyperboliques en produits infinis et en séries de fractions

43. Décomposition de $\sin m\theta$ **en facteurs.** — Nous considérons seulement le cas où m est un entier impair $2n + 1$.

L'expression de $\sin m\theta$ se tire de la *formule de Moivre :*

$$\cos m\theta + i \sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m,$$

en égalant les coefficients de i dans les deux membres. Il vient ainsi, pour toute valeur *réelle* ou *imaginaire* de θ,

$$\sin m\theta = m\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \dots$$

Par conséquent, m étant égal à $2n + 1$,

$$\frac{\sin m\theta}{\sin\theta} = m\cos^{2n}\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta + \dots$$

Tous les exposants sont pairs au second membre. Donc, si l'on remplace $\cos^2\theta$ par $1 - \sin^2\theta$, le second membre se transforme en un polynome de degré n en $\sin^2\theta$.

Posons, en abrégé, $z = \sin^2\theta$ et soit $F_n(z)$ ce polynôme de degré n ; on peut écrire, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ les racines de $F_n(z)$,

$$(1)\quad \frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{z}{\alpha_2}\right)\dots\left(1 - \frac{z}{\alpha_n}\right), \qquad (z = \sin^2\theta)$$

les deux membres ayant la même limite 1 quand θ et, par suite, z tendent vers 0.

Mais les racines z_1, z_2... de $F_n(z)$ s'obtiennent tout de suite. En effet, $\sin m\theta$ s'annule pour les valeurs $\frac{\pi}{m}, \frac{2\pi}{m}, \ldots \frac{n\pi}{m}$ de θ, toutes inférieures à $\frac{\pi}{2}$ (car $m = 2n + 1$) et auxquelles correspondent les valeurs croissantes (donc différentes) de z :

$$(2) \qquad z_1 = \sin^2\frac{\pi}{m}, \qquad z_2 = \sin^2\frac{2\pi}{m} \quad \ldots \quad z_n = \sin^2\frac{n\pi}{m},$$

qui sont donc les racines de $F_n(z)$, car $\sin\theta$ ne s'annule pas.

Portant les valeurs (2) dans (1), on aura la formule de décomposition cherchée.

44. Décomposition de $\operatorname{sh} x$ et de $\sin x$ en produits infinis. — Soit x une valeur réelle ; changeons θ en $\frac{xi}{m}$ dans la formule (1). Il faut remplacer $\sin\theta$ par $i \operatorname{sh}\frac{x}{m}$ et $\sin m\theta$ par $i\operatorname{sh} x$. Il vient donc

$$\frac{\operatorname{sh} x}{m \operatorname{sh}\frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{m}}{z_k}\right) \qquad (m = 2n + 1).$$

Tout est positif dans le second membre de cette formule. Prenons les logarithmes : le produit sera remplacé par une somme. Soit p un entier $< n$; nous aurons

$$(3) \qquad \operatorname{Log}\frac{\operatorname{sh} x}{m\operatorname{sh}\frac{x}{m}} = \sum_{k=1}^{p}\operatorname{Log}\left(1 + \frac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{m}}{z_k}\right) + R_p,$$

en désignant par R_p la somme des logarithmes non écrits, qui sont tous positifs. Mais, si α est positif, on a $e^\alpha > 1 + \alpha$, par conséquent $\alpha > \operatorname{Log}(1 + \alpha)$; il vient donc

$$0 < R_p < \sum_{p+1}^{n}\frac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{m}}{z_k} = \left(\operatorname{sh}^2\frac{x}{m}\right)\sum_{p+1}^{n}\frac{1}{z_k}.$$

Quand k varie de 1 à $n = \dfrac{m-1}{2}$, le rapport $\left(\sin \dfrac{k\pi}{m}\right) : \dfrac{k\pi}{m}$ est $> \dfrac{2}{\pi}$, car c'est celui du sinus à l'arc, qui décroît constamment sans atteindre le minimum $\left(\sin \dfrac{\pi}{2}\right) : \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2}{\pi}$. On a donc

$$\frac{1}{\alpha_k} = \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{m}} < \frac{1}{\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2 \left(\dfrac{k\pi}{m}\right)^2} = \frac{m^2}{4k^2} < \frac{m^2}{4} \left| \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right|$$

et, par conséquent, *a fortiori*

$$R_p < \frac{m^2}{4}\left(\mathrm{sh}^2 \frac{x}{m}\right) \sum_{p+1}^{n} \left| \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right| = \frac{m^2}{4p}\, \mathrm{sh}^2 \frac{x}{m}.$$

Faisons maintenant tendre m vers l'infini dans la formule (3), et observons que l'on a

$$\lim m\, \mathrm{sh} \frac{x}{m} = x, \qquad \lim m^2 \alpha_k = \lim m^2 \sin^2 \frac{k\pi}{m} = k^2\pi^2 ;$$

il vient, quelque grand que soit p,

$$\mathrm{Log} \frac{\mathrm{sh}\, x}{x} = \sum_{1}^{p} \mathrm{Log}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) + \lim R_p,$$

$$0 < \lim R_p < \frac{x^2}{4p}.$$

Si l'on fait tendre maintenant p vers l'infini, $\lim R_p$ tend vers 0 et l'on trouve

$$(4) \qquad \mathrm{Log} \frac{\mathrm{sh}\, x}{x} = \mathrm{Log} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \sum_{1}^{\infty} \mathrm{Log}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Enfin, en repassant des logarithmes aux nombres, on obtient $\mathrm{sh}\, x$ sous forme de *produit infini*, c'est-à-dire comme limite du produit d'un nombre illimité de facteurs :

$$(5) \qquad \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \prod_{1}^{\infty}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

La décomposition de $\sin x$ peut s'obtenir directement, par un raisonnement analogue. Mais on peut la déduire de la formule précédente. Il suffit de remarquer que la *formule* (5) *subsiste si l'on remplace x par une variable imaginaire z.*

En effet, le produit qui constitue le second membre de (5) se développe, par les multiplications successives, en une somme de puissances de x toutes positives. Donc, l'ordre des termes étant indifférent, ce second membre peut être ordonné suivant les puissances de x, ce qui le ramènera nécessairement à la série potentielle qui définit $\operatorname{sh} x$.

Cette réduction à la série qui définit le sinus hyperbolique demeure légitime quand on remplace x par une imaginaire z de module x, car la somme de puissances de x sera seulement remplacée par une somme absolument convergente de puissances de z et l'ordre des termes demeure indifférent.

Donc on peut remplacer x par ix dans (5) et l'on en déduit

$$\sin x = x \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{6}$$

On tire de là le développement analogue

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x} = \prod_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right).$$

45. Séries de fractions. — Si l'on dérive la formule (4), il vient, pour toute valeur réelle de x,

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2 + x^2}. \tag{7}$$

En effet, cette série, ayant tous ses termes inférieurs à ceux de la série convergente à termes positifs Σk^{-2}, est *uniformément* convergente quand x varie d'une manière quelconque, ce qui justifie la dérivation.

De même, remplaçons, dans (6), $\sin x$ et tous les facteurs par leur valeur absolue ; prenons les logarithmes des deux membres, et dérivons. Il viendra

$$\cot x = \frac{1}{x} - 2x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi^2 - x^2}. \tag{8}$$

En effet, cette série converge encore absolument et *uniformément* dans tout intervalle où les dénominateurs ne s'an-

nulent pas, car le rapport de son terme général à celui de la série Σk^{-2} tend vers une limite finie pour k infini.

Si l'on remarque que l'on a

$$\frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2} = \frac{1}{x - k\pi} + \frac{1}{x + k\pi},$$

on voit que la formule (8) peut s'écrire plus simplement

$$\text{(9)} \qquad \cot x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - k\pi},$$

à la condition d'associer dans la sommation les termes qui correspondent aux valeurs $+ k$ et $- k$.

Le développement de $\cot x$, en donne encore d'autres :

$$\operatorname{tg} x = -\cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2}\left(\cot \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - 2k\pi} - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x - (2k+1)\pi},$$

ou, plus simplement,

$$\text{(10)} \qquad \frac{1}{\sin x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x - k\pi} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 - k^2\pi^2}.$$

Remarque. — Il est souvent utile d'écrire la formule (7) sous une autre forme. On remarque que l'on a

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{e^{2x} - 1} + 1.$$

On substitue cette valeur dans le premier membre de (7), puis on change x en $x : 2$. L'équation prend la forme

$$\text{(11)} \qquad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + 2x^2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4k^2\pi^2 + x^2},$$

46. Calcul d'une intégrale d'Euler. — Soit x une quantité comprise entre 0 et 1 ; on a

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{0}^{n-1} (-x)^k + (-1)^n \theta x^n,$$

et θ est compris entre 0 et 1, car θ est égal à $1 : (1 + x)$.

Donc, si a désigne une quantité *positive*, il vient, en multipliant la relation précédente par $x^{a-1}\,dx$ et intégrant, puis en observant que θ peut sortir du signe d'intégration tout en gardant le sens d'une quantité comprise entre 0 et 1,

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \sum_0^{n-1} \frac{(-1)^k}{a+k} + \frac{(-1)^n\theta}{a+n}.$$

Enfin, en faisant tendre a vers l'infini, on obtient

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{a+k}.$$

Supposons maintenant a compris entre 0 et 1 ; on peut changer a en $1-a$ dans cette intégrale, puis x en $1:x$; il vient

$$\int_0^1 \frac{x^{-a}\,dx}{1+x} = \int_1^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{a-k}.$$

Ajoutons cette relation à la précédente, nous trouvons, par (10),

$$(12) \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \pi \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a\pi - k\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Cette intégrale importante est due à Euler, qui l'a calculée par un procédé très différent du précédent.

§ 2. Nombres de Bernouilli

47. Développement de $\dfrac{x}{e^x-1}$ en série potentielle. — Soit x une quantité positive ; on a $(0<\theta<1)$

$$\frac{x}{1+x} = -\sum_1^{n-1}(-x)^p - \frac{(-x)^n}{1+x} = -\sum_1^{n-1}(-x)^p - \theta(-x)^n.$$

Donc, en changeant x en $x^2 : 4k^2\pi^2$, et en supposant seulement x réel,

$$\frac{x^2}{4k^2\pi^2+x^2} = -\sum_{p=1}^{n-1}\left(-\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)^p - \theta\left(-\frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)^n.$$

Portons ces développements dans le second membre de la formule (11) du n° précédent ; en posant, en abrégé,

$$s_p = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} \cdots,$$

il viendra $(0 < \theta < 1)$

$$(1) \quad \frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} - 2\sum_{p=1}^{n-1} s_{2p}\left(-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)^p - 2\theta s_{2n}\left(-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)^n$$

Si n tend vers l'infini, s_{2n} tend vers l'unité et le dernier terme tend vers 0, pourvu que $|x|$ soit $< 2\pi$. Donc, si $|x|$ est $< 2\pi$, on a le développement en série potentielle convergente

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + 2\left[\frac{s_2 x^2}{(2\pi)^2} - \frac{s_4 x^4}{(2\pi)^4} + \frac{s_6 x^6}{(2\pi)^6} - \cdots\right]$$

48. Nombres de Bernoulli. — Les nombres de Bernoulli ([1]) sont les nombres B_1, B_2,... B_n,..., définis par le développement en série

$$(2) \quad \frac{x}{e^x - 1} = 1 + \frac{B_1 x}{1} + \frac{B_2 x^2}{2!} + \cdots + \frac{B_n x^n}{n!} + \cdots,$$

qui converge, comme on vient de le voir, pourvu que $|x|$ soit $< 2\pi$.

Comparant cette formule à la précédente, on en conclut que tous les nombres B d'indice impair sont nuls, sauf B_1 qui est égal à $-\frac{1}{2}$, et que les nombres d'indice pair, B_2, B_4,... sont alternativement positifs et négatifs. On a effectivement

$$(3) \qquad B_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}} s_{2n}.$$

Quand n est grand, s_{2n} diffère peu de 1 ; cette formule montre que les nombres de Bernoulli croissent très rapidement quand n augmente.

([1]) La notation des nombres de Bernoulli est variable avec les auteurs. Nous avons adopté celle d'Édouard Lucas qui est la plus commode.

Si l'on introduit la notation des nombres de Bernoulli dans la formule (1), il vient, x étant réel et θ compris entre 0 et 1,

$$(4)\quad \frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_2 x^2}{2!} + \frac{B_4 x^4}{4!} + \ldots + \frac{B_{2n-2}x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \theta\frac{B_{2n}x^{2n}}{(2n)!}.$$

49. Calcul des nombres de Bernoulli. — Nous allons montrer que *les nombres de Bernoulli sont rationnels*. Pour les calculer, il est commode de se servir de la notation symbolique suivante :

Convenons de remplacer B^n par B_n dans le développement de e^{Bx} en série potentielle ; la formule (2) pourra s'écrire symboliquement

$$(5)\qquad \frac{e^x-1}{x} = e^{Bx}.$$

L'utilité de cette notation vient de la propriété suivante :

Si l'on multiplie la série e^{Bx} par celle qui représente $e^{\alpha x}$, on aura aussi symboliquement

$$e^{\alpha x}\, e^{Bx} = e^{(\alpha+B)x}.$$

En effet, si l'on considère B comme une indéterminée, l'égalité précédente a lieu par la propriété de l'expotentielle. Les deux membres peuvent être ordonnés suivant les puissances de B ; après quoi, les coefficients des mêmes puissances de B doivent être identiques de part et d'autre. L'identité des deux membres subsiste donc quand on remplace B, B^2,... par B_1, B_2,... Cette substitution donne aux deux membres leur sens symbolique. D'ailleurs les séries convergent pourvu que x soit $< 2\pi$ en valeur absolue.

Chassons le dénominateur dans l'équation (5) ; il vient

$$(6)\qquad x = e^{(B+1)x} - e^{Bx}.$$

Par suite, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x, on obtient les équations symboliques :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} (B+1) - B = 1 \\ (B+1)^2 - B^2 = 0 \\ (B+1)^3 - B^3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ (B+1)^n - B^n = 0 \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l} 1 = 1 \\ 2B_1 + 1 = 0 \\ 3B_2 + 3B_1 + 1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

C'est un système des formules récurrentes à coefficients entiers, d'où l'on tire de proche en proche les valeurs de $B_1, B_2, B_3, \ldots$

$$B_1 = -\frac{1}{2} \qquad B_6 = \frac{1}{42} \qquad B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

$$B_2 = \frac{1}{6} \qquad B_8 = -\frac{1}{30} \qquad B_{14} = \frac{7}{6}$$

$$B_4 = -\frac{1}{30} \qquad B_{10} = \frac{5}{66} \qquad B_{16} = -\frac{3617}{510}$$

50. Propriétés des nombres de Bernoulli. — Multiplions la formule (6) par e^{yx}; il vient

$$xe^{yx} = e^{(B+1+y)x} - e^{(B+y)x},$$

d'où, en égalant les coefficients de x^n de part et d'autre,

(8) $$ny^{n-1} = (B+1+y)^n - (B+y)^n.$$

Désignons par $f(y)$ un polynome entier quelconque ; on aura

(9) $$f(y+B+1) - f(y+B) = f'(y).$$

C'est l'identité symbolique fondamentale à laquelle satisfont les nombres de Bernoulli. Elle résulte de la formule (8), qui exprime que (9) est exacte pour chacun des termes du polynome.

Voici quelques cas particuliers :

1° Soit $f(y) = (2y-1)^p$; on a, pour $y=0$,

$$(2B+1)^p - (2B-1)^p = 2p(-1)^{p-1}$$

2° Soit $f(y) = y(y+1)(y+2)\ldots(y+p)$; on a, pour $y=0$,

$$(p+1)(B+1)(B+2)\ldots(B+p) = p\,!$$

3° Soit $1 < q \leqslant p$; posons $f(y) = (y-1)^p y^q$; on a, pour $y=0$,

$$B^p(B+1)^q - B^q(B-1)^p = 0.$$

Cette dernière formule, qui est due à *Stern*, est peut-être la plus commode pour le calcul des nombres de Bernoulli, parce qu'elle ne contient pas tous les nombres B, mais seulement ceux qui sont compris entre B^q et B^{p+q}.

§ 3. Intégrales eulériennes

51. Définitions et premières propriétés. — Legendre a donné le nom *d'intégrales eulériennes de première et de deuxième espèce* aux expressions :

$$(1)\quad B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\qquad \Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx.$$

La première est la fonction *Bêta*, la seconde la fonction *Gamma*.

Ces intégrales sont absolument convergentes pourvu que a et b soient >0 (nos 4 et 9). Elles cessent d'exister si a ou b est <0 (b n'intervenant que pour B). Il sera donc entendu, dans ce chapitre, que a et b sont réels et positifs.

Assignons aux variables a et b un minimum positif ε ; tous les éléments de l'intégrale B sont alors maximés et positifs si $a=b=\varepsilon$, ce qui laisse subsister la convergence. Donc B converge uniformément (n° 22) et est fonction continue de a et de b (n° 23).

Supposons maintenant que a varie dans un intervalle positif (ε, A). Faisons la décomposition

$$\Gamma(a)=\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx+\int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}dx;$$

ces deux intégrales convergeront uniformément, car leurs éléments sont respectivement égaux ou inférieurs à ceux des deux intégrales convergentes :

$$\int_0^1 x^{\varepsilon-1}dx,\qquad \int_1^\infty x^{A-1}e^{-x}dx.$$

Donc Γ est une fonction continue de a.

Voici maintenant quelques propriétés qui résultent immédiatement des définitions :

1° Si, dans l'expression (1) de B, on change la variable x en $1-x$, cela revient à permuter a et b. Par conséquent,

$$(2)\qquad B(a,b)=B(b,a).$$

2° *Si a ou b est entier, on obtient $B(a, b)$ sous forme explicite.*

En effet, soit b entier ; on a d'abord, si $b = 1$,

$$B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1}\,dx = \frac{1}{a}.$$

Ensuite, si b est un entier $n > 1$, on trouve, en intégrant par parties,

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{n-2}\,dx = \frac{n-1}{a}\,B(a+1, n-1)$$

et ainsi, de proche en proche,

$$(3) \qquad B(a,n) = \frac{1.\,2.\,\ldots\,(n-1)}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}.$$

3° On a la relation, d'un usage fréquent,

$$(4) \qquad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a),$$

qui se démontre par l'intégration par parties effectuée ci-dessous :

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty x^a e^{-x}\,dx = \left[-x^a e^{-x}\right]_0^\infty + a\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx,$$

le terme aux limites étant nul.

Si n est entier, on a, en appliquant (4) de proche en proche,

$$(5) \qquad \Gamma(a+n) = a(a+1)\ldots(a+n-1)\Gamma(a).$$

Cette formule permet de réduire à (0, 1) l'intervalle dans lequel il est nécessaire de calculer $\Gamma(a)$.

4° On voit immédiatement, par la formule (1), que $\Gamma(a) = 1$. Donc, si n est entier, on obtient, par la formule (5), $\Gamma(n+1)$ sous forme explicite :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

On remarquera, en particulier, que $\Gamma(2) = 1$.

5° Multiplions par $\Gamma(a)$ les deux termes de la fraction qui forme le second membre de (3) ; il viendra, par (5) et puisque $(n-1)! = \Gamma(n)$.

$$(6) \qquad B(a,n) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)}.$$

Cette formule n'est encore établie que si n est entier, mais on va montrer dans le n° suivant qu'elle est générale.

6° Soit y un nombre positif ; si l'on change la variable d'intégration x en yx dans l'expression (1) de Γ, on obtient la formule importante

$$\frac{\Gamma(a)}{y^a} = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-yx}\, dx. \tag{7}$$

52. Nouvelle expression de B. Réduction définitive de B à Γ. — Dans l'expression (1) de B, faisons le changement de variable

$$x = \frac{y}{1+y}, \qquad 1 - x = \frac{1}{1+y}, \qquad dx = \frac{dy}{(1+y)^2}.$$

Les nouvelles limites seront 0 et ∞; il viendra donc

$$B(a, b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}\, dy}{(1+y)^{a+b}}. \tag{8}$$

On tire de cette formule la démonstration générale de la formule (6). On a, en effet, par la formule (7),

$$\int_0^\infty x^{a+b-1} e^{-(1+y)x}\, dx = \frac{\Gamma(a+b)}{(1+y)^{a+b}}.$$

Multiplions par $y^{b-1}\, dy$ et intégrons de 0 à ∞. On peut intervertir les intégrations dans le premier membre, car les fonctions sont positives et la règle du n° 17 s'applique ; il vient ainsi

$$\int_0^\infty x^{a+b-1} e^{-x}\, dx \int_0^\infty y^{b-1} e^{-yx}\, dx = \Gamma(a+b) \int_0^\infty \frac{y^{b-1}\, dy}{(1+y)^{a+b}},$$

ou, par (7) et (8),

$$\Gamma(b) \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(a+b)\, B(a, b)$$

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{9}$$

Cette formule, dont la démonstration précédente est due à Jacobi, ramène l'étude B à celle Γ, qui ne dépend plus que d'un paramètre.

Remarque. — Revenons à l'intégrale (8). On peut, en même

temps que l'intervalle d'intégration, la partager en deux autres étendues de 0 à 1 et de 1 à ∞. Changeons y en $1 : y$ dans cette dernière ; il viendra

$$(10) \qquad B(a, b) = \int_0^1 \frac{y^{a-1} + y^{b-1}}{(1+y)^{a+b}}\, dy,$$

formule qui met aussi en évidence la symétrie par rapport à a et b.

53. Relation des compléments. — On a, par les formules (9) et (8),

$$B(a, 1-a) = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}.$$

La valeur de cette intégrale a été calculée au n° 46. On en conclut la formule importante, trouvée par Euler et connue sous le nom de *relation des compléments*,

$$(11) \qquad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

En particulier, si $a = \frac{1}{2}$,

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi, \qquad \text{d'où [1]} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

La relation (11) ramène le calcul de $\Gamma(a)$ à celui de $\Gamma(1-a)$ et, par conséquent, permet de réduire à $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ l'intervalle dans lequel il est nécessaire de calculer $\Gamma(a)$.

54. Formule de Legendre. — On tire des formules (9) et (10)

$$B(a, a) = \frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)} = 2\int_0^1 \frac{y^{a-1}\,dy}{(1+y)^{2a}}.$$

Faisons le changement de variable

$$y = \frac{1-z}{1+z}, \text{ il vient } \begin{cases} 1 + y = \dfrac{2}{1+z} \\ dy = -\dfrac{2dz}{(1+z)^2} \end{cases}$$

$$B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-2}} \int_0^1 (1-z^2)^{a-1}\, dz$$

[1] On obtient aussi ce résultat en changeant x en $\sqrt{x}$ dans l'intégrale du n° 21.

ou, en changeant encore z en $\sqrt{z}$,

$$B(a, a) = \frac{1}{2^{2a-1}} \int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{-\frac{1}{2}} \, dz = \frac{B\left(a, \frac{1}{2}\right)}{2^{2a-1}}.$$

Remplaçons $B(a, a)$ et $B\left(a, \frac{1}{2}\right)$ par leurs expressions en Γ tirées de (9), puis $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ par $\sqrt{\pi}$; la relation précédente donnera

$$(12) \qquad \Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a).$$

Cette relation a été trouvée par Legendre.

En y changeant a en $\frac{a}{2}$, on peut l'écrire

$$\Gamma(a) = \frac{2^{a-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

En tenant compte de (11), cette relation permet de réduire à $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ l'intervalle dans lequel il est nécessaire de calculer $\Gamma(a)$.

55. Produit d'Euler. — Substitutons successivement les valeurs $a = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n-1}{n}$ dans la relation (11) et multiplions les résultats ; il vient

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{n-1}{n} \pi}.$$

Pour évaluer ce produit de sinus, considérons la décomposition en facteurs

$$x^n - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right).$$

En y faisant tendre x vers 1, on en tire

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2k\pi i}{n}}\right) = \lim \frac{x^n - 1}{x - 1} = n.$$

Multiplions, facteur par facteur, cette relation avec

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\frac{k\pi i}{n}}}{2i} = \frac{e^{\frac{(n-1)\pi i}{2}}}{(2i)^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}};$$

nous trouvons, eu égard à l'expression du sinus en exponentielles,

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Par conséquent,

$$(13) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Cette relation a été trouvée par Euler et généralisée par Gauss (n° 59).

56. Intégrale de Raabe. — On tire de la relation précédente, en prenant les logarithmes en divisant par n,

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)\operatorname{Log} 2\pi - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{Log} n}{n}.$$

Faisons tendre n vers l'infini; on peut faire, dans la somme du premier membre, $\frac{k}{n} = x$ et $\frac{1}{n} = dx$, et la limite de cette somme est une intégrale définie ; il vient

$$\int_0^1 \operatorname{Log}\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi = \operatorname{Log}\sqrt{2\pi}.$$

Ce résultat permet de calculer facilement l'intégrale de Raabe, qui est la suivante :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \operatorname{Log}\Gamma(a+x)\,dx = \int_a^{a+1} \operatorname{Log}\Gamma(x)\,dx.$$

En effet, les dérivées de $\Gamma(a+x)$ sont les mêmes par rapport à x et à a ; donc

$$\mathrm{D}_a \mathrm{I} = \int_0^1 \frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)}\,dx = \operatorname{Log}\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \operatorname{Log} a,$$

car $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, en vertu de (4). Par conséquent,

$$I = \int \operatorname{Log} a \, da = a(\operatorname{Log} a - 1) + C.$$

La constante C se détermine pour $a = 0$; il vient, comme on l'a prouvé au début du n° actuel, $C = I_0 = \operatorname{Log}\sqrt{2\pi}$. En définitive, *l'intégrale de Raabe* s'évalue par la formule

$$(14)\quad I = \int_0^1 \operatorname{Log}\Gamma(a+x)\,dx = a(\operatorname{Log} a - 1) + \operatorname{Log}\sqrt{2\pi}.$$

Cette intégrale joue un rôle important dans la théorie de la fonction Γ; on verra plus loin qu'elle est la valeur asymptotique de $\operatorname{Log}\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right)$.

§ 4. Expressions des eulériennes en produits infinis

57. Formule de Cauchy donnant D Log Γ(a). — En dérivant sous le signe l'intégrale qui définit Γ, il vient

$$(15)\quad \Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\operatorname{Log} x\,dx = \int_0^1 + \int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}\operatorname{Log} x\,dx.$$

Cette dérivation est légitime, car chacune des deux intégrales de 0 à 1 et de 1 à ∞ ci-dessus converge uniformément quand a varie dans un intervalle positif quelconque (ε, A) : elles ont, en effet, respectivement leur élément moindre que celui des intégrales correspondantes à éléments positifs et bien déterminées :

$$\int_0^1 x^{\varepsilon-1}(-\operatorname{Log} x)\,dx, \qquad \int_1^\infty x^A e^{-x}\,dx,$$

car e^{-x} est < 1 et (pour $x > 1$) $\operatorname{Log} x$ est > 0 et $< x$.

Nous allons transformer la formule (15). Soit y un paramètre positif ; considérons la relation

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y}\,dx = \frac{e^{-y}}{y}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx - \frac{1}{y}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-(1+y)x}\,dx,$$

qui peut aussi s'écrire, eu égard à (1) et (7),

$$\int_0^1 + \int_1^x x^{a-1} e^{-x} \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y} dx = \frac{\Gamma(a)}{y}\left[e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a}\right].$$

Multiplions par dy et intégrons de 0 à ∞. On peut intervertir les signes d'intégration dans le premier membre (n° 17), car la fonction à intégrer est toujours négative sous le signe $\int_0^1$ et toujours positive sous le signe $\int_1^\infty$ et, en se rappelant qu'on a (n° 25)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} - e^{-xy}}{y} dy = \text{Log}\, x,$$

on voit que les intégrales intérieures sont respectivement fonctions continues de x ou de y, sauf si x ou y est nul. Il vient ainsi

$$\int_0^1 + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} \text{Log}\, x\, dx = \Gamma'(a) = \Gamma(a)\int_0^\infty \left[e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a}\right]\frac{dy}{y}.$$

D'où la *formule de Cauchy* :

$$\text{(16)} \qquad \text{D Log}\,\Gamma(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^\infty \left[e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a}\right]\frac{dy}{y}.$$

58. Formule de Gauss. Constante d'Euler. — En faisant $a=1$ dans la formule de Cauchy, on obtient la relation suivante, qui définit la constante d'Euler C :

$$\text{(17)} \qquad -C = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int_0^\infty \left[e^{-y} - \frac{1}{1+y}\right]\frac{dy}{y}.$$

Soustrayons cette équation de (16) ; il vient

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{(1+y)^a}\right)\frac{dy}{y}$$

et, en posant $1+y=1:x$, on trouve la *formule de Gauss* :

$$\text{(18)} \qquad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + C = \int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x} dx.$$

Si a est rationnel, on peut effectuer l'intégration ; en particulier, si a est un entier n, on a

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} + C = \int_0^1 (1 + x + \ldots + x^{n-2})\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}.$$

C'est de cette formule qu'on se sert pour calculer C, en utilisant les formules d'approximation de $\Gamma'(n) : \Gamma(n)$ que nous indiquerons plus loin. La valeur de C est

$$C = 0{,}5772\ 1566\ 4901\ 5328\ldots$$

59. Produit de Gauss. — C'est une généralisation de la formule d'Euler (n° 55). Changeons, dans la formule (18), a en $a + \dfrac{k}{n}$ où k et n sont entiers, ensuite la variable x et x^n ; il vient

$$\frac{\Gamma'\left(a + \frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a + \frac{k}{n}\right)} + C = \int_0^1 dx\, \frac{1 - x^{a + \frac{k}{n} - 1}}{1 - x} = n \int_0^1 dx\, \frac{x^{n-1} - x^{na-1+k}}{1 - x^n}.$$

Faisons $k = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$ et ajoutons ; il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(a + \frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a + \frac{k}{n}\right)} + nC = n \int_0^1 dx\, \frac{n x^{n-1} - x^{na-1} \Sigma x^k}{1 - x^n}$$

$$= n \int_0^1 dx \left(\frac{n x^{n-1}}{1 - x^n} - \frac{x^{na-1}}{1 - x}\right).$$

Soustrayons de cette équation n fois la suivante, tirée de (18) :

$$\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} + C = \int_0^1 dx \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{x^{na-1}}{1 - x}\right);$$

il vient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma'\left(a + \frac{k}{n}\right)}{\Gamma\left(a + \frac{k}{n}\right)} - n\,\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} = n \int_0^1 dx \left(\frac{n x^{n-1}}{1 - x^n} - \frac{1}{1 - x}\right).$$

Le second membre se ramène à une intégrale de *Frullani* (n° 25) par la substitution $x = e^{-z}$; il devient ainsi

$$n\int_0^\infty\left(\frac{nze^{-nz}}{1-e^{-nz}}-\frac{ze^{-z}}{1-e^{-z}}\right)\frac{dz}{z}=n\int_0^\infty\frac{f(nz)-f(z)}{z}\,dz=-n\,\mathrm{Log}\,n.$$

Remplaçons donc le second membre de l'équation précédente par $-n\,\mathrm{Log}\,n$ et intégrons ; il vient

$$\mathrm{Log}\,\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}=-an\,\mathrm{Log}\,n+\mathrm{Log}\,C.$$

On détermine la constante d'intégration C en faisant $a=\frac{1}{n}$, ce qui réduit le produit sous le logarithme à celui d'Euler (n° 55), dont la valeur est $(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}:\sqrt{n}$. Il vient donc, pour déterminer C,

$$\mathrm{Log}\,\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}=\mathrm{Log}\,\frac{C}{n},\qquad \text{d'où}\qquad C=\sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

On obtient ainsi la *relation de Gauss*

$$(19)\quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma(na)}{n^{na-\frac{1}{2}}}.$$

En particulier, si $n=2$, on retrouve la formule (11). On peut, au moyen de la formule (19), en donnant successivement à n les valeurs 3, 5, 7, 11... restreindre de plus en plus l'intervalle dans lequel le calcul direct de $\Gamma(a)$ est nécessaire.

60. Expression de $D^2\,\mathrm{Log}\,\Gamma(a)$ en série de fractions. — Changeons x en e^{-x} dans la formule de Gauss (18) ; il vient

$$D\,\mathrm{Log}\,\Gamma(a)+C=\int_0^\infty\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx\,;$$

et, en dérivant encore une fois, ce qui se fait sous le signe d'intégration (n° 23),

$$D^2\,\mathrm{Log}\,\Gamma(a)=\int_0^\infty\frac{xe^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx.$$

Dans cette intégrale, substituons le développement

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_0^{n-1} e^{-kx} + \frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}} = \sum_0^{n-1} e^{-kx} + \theta\,\frac{e^{-(n-1)x}}{x}$$

(θ étant compris entre 0 et 1, car le dénominateur $1 - e^{-x} = e^{-x}(e^{x} - 1)$ est $> xe^{-x}$) ; il vient

$$D^2 \operatorname{Log}\Gamma(a) = \sum_0^{n-1}\int_0^{\infty} x e^{-(k+a)x}\,dx + \theta\int_0^{\infty} e^{-(a+n-1)x}\,dx$$
$$= \sum_0^{n-1}\frac{1}{(a+k)^2} + \frac{\theta}{a+n-1}.$$

Donc, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient la série absolument et *uniformément* convergente :

$$(20)\quad D^2 \operatorname{Log}\Gamma(a) = \sum_0^{\infty}\frac{1}{(a+k)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \dots$$

61. Formule de Weierstrass : Développement de $1 : \Gamma(a)$ en produit de facteurs primaires. — Intégrons l'équation (20) de 1 à a ; il vient, puisque la constante d'Euler $C = -\Gamma'(1)$,

$$D \operatorname{Log}\Gamma(a) + C = \sum_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+n} - \frac{1}{a+n}\right)$$

et, en intégrant encore une fois de 1 à a,

$$(21)\quad \operatorname{Log}\Gamma(a) + C(a-1) = \sum_0^{\infty}\left(\frac{a-1}{1+n} - \operatorname{Log}\frac{a+n}{1+n}\right).$$

Si l'on change a en $a+1$, on peut écrire, plus simplement,

$$\operatorname{Log}\Gamma(a+1) + Ca = \sum_1^{\infty}\left(\frac{a}{n} - \operatorname{Log}\frac{a+n}{n}\right).$$

Revenons des logarithmes aux nombres ; nous obtenons la *formule de Weierstrass*

$$(22)\quad \frac{1}{\Gamma(a+1)} = e^{Ca}\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)e^{-\frac{a}{n}}.$$

Les facteurs de ce produit infini sont ce que Weierstrass appelle des *facteurs primaires*. Ce produit peut servir de point de départ pour étendre la définition de $\Gamma(a)$ aux valeurs ima-

ginaires du paramètre. Nous ne nous occuperons pas de cette question pour le moment. Cette extension peut aussi se faire au moyen d'une expression de $\Gamma(a)$ en produit infini, expression trouvée par Euler et retrouvée par Gauss, que nous allons faire connaître.

62. Formule d'Euler : Expression de $\Gamma(a)$ en produit infini. — Débarrassons la formule (21) de C, en faisant $a = 2$ dans cette formule, puis soustrayant de la formule (21) la formule ainsi obtenue multipliée par $(a - 1)$; il vient

$$\operatorname{Log} \Gamma(a) = \sum_{0}^{\infty} \left[(a-1) \operatorname{Log} \frac{2+n}{1+n} - \operatorname{Log} \frac{a+n}{1+n} \right].$$

Effectuons la somme des termes depuis $n = 0$ jusque $n = m - 2$; la relation précédente peut s'écrire

$$\operatorname{Log} \Gamma(a) = \lim_{m=\infty} \left[(a-1) \operatorname{Log} m + \sum_{0}^{m-2} \operatorname{Log} \frac{1+n}{a+n} \right]$$

et, en revenant des logarithmes aux nombres,

$$\Gamma(a) = \lim_{m=\infty} \cdot m^{a-1} \frac{1.2\ldots(m-1)}{a(a+1)\ldots(a+m-2)}.$$

Multiplions encore par le facteur $m : (a + m - 1)$, qui tend vers l'unité ; il vient, sous une forme plus commode,

$$(23) \qquad \Gamma(a) = \lim_{m=\infty} \cdot m^{a} \frac{1.2\ldots(m-1)}{a(a+1)\ldots(a+m-1)}.$$

C'est la formule obtenue par Euler.

§ 5. Formules asymptotiques

63. Expression de Log $\Gamma(a)$ par une intégrale définie. — Rappelons la formule de Cauchy (16), que nous écrirons comme il suit :

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_{0}^{1} + \int_{1}^{\infty} \left[e^{-y} - (1+y)^{-a} \right] \frac{dy}{y}.$$

Le second membre est ainsi décomposé en deux intégrales, dont la seconde, qui est à limite infinie, est seule *généralisée*.

Mais cette intégrale converge *uniformément* pourvu que a reste supérieur à un nombre positif ε, car elle est la différence de deux autres :

$$\int_1^{\infty} e^{-y}\frac{dy}{y} - \int_1^{\infty}\frac{dy}{(1+y)^a\, y},$$

dont la première est indépendante de a et la seconde *uniformément convergente* (son élément décroissant quand a augmente).

Multiplions donc l'équation de Cauchy par da et intégrons de 1 à a ($a > 0$) ; on peut intégrer sous le signe (la convergence étant uniforme) et l'on trouve l'intégrale *uniformément convergente* (n° 23)

$$\operatorname{Log}\Gamma(a) = \int_0^{\infty}\left[(a-1)e^{-y} - \frac{(1+y)^{-1} - (1+y)^{-a}}{\operatorname{Log}(1+y)}\right]\frac{dy}{y}.$$

Si $a = 2$, on a, en particulier,

$$0 = \int_0^{\infty}\left[\frac{e^{-y}}{y} - \frac{(1+y)^{-2}}{\operatorname{Log}(1+y)}\right]dy.$$

Multiplions par $(a-1)$ et soustrayons de l'équation précédente ; il vient

$$\operatorname{Log}\Gamma(a) = \int_0^{\infty}\left[\frac{a-1}{(1+y)^2} - \frac{(1+y)^{-1} - (1+y)^{-a}}{y}\right]\frac{dy}{\operatorname{Log}(1+y)}$$

et, en posant $\operatorname{Log}(1+y) = x$, d'où $y = e^x - 1$,

$$\operatorname{Log}\Gamma(a) = \int_0^{\infty}\left[(a-1)e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{1 - e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}.$$

Enfin en changeant encore x en $-x$, nous obtenons l'intégrale cherchée

$$(24)\qquad \operatorname{Log}\Gamma(a) = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x}\left[\frac{e^{ax} - e^x}{e^x - 1} - (a-1)e^x\right]$$

et les changements de variables n'ont pas altéré le caractère de convergence uniforme pour $a > \varepsilon$.

Remarque. — En multipliant l'expression précédente par da et en intégrant de a à $a+1$ sous le signe (ce qui est permis, la convergence étant uniforme), on obtient une expression utile de l'*intégrale de Raabe :*

$$(25)\qquad \mathrm{I} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x}\left[\frac{e^{ax}}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1} - \left(a - \frac{1}{2}\right)e^x\right].$$

On a d'ailleurs, comme on le sait (n° 55), sous forme finie,

$$I = \int_a^{a+1} \operatorname{Log} \Gamma(a)\,da = a(\operatorname{Log} a - 1) + \operatorname{Log} \sqrt{2\pi}.$$

64. Fonction de Binet. — Soustrayons la formule (25) de (24) et ajoutons membre à membre avec

$$\frac{1}{2} \operatorname{Log} a = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{2} \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax} - e^{x}}{2} \frac{dx}{x};$$

tous les termes qui ne contiennent pas le facteur e^{ax} se détruisent sous le signe $\int$ et il vient

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \operatorname{Log} \Gamma(a) - I + \frac{\operatorname{Log} a}{2} = \int_{-\infty}^{0} f(x) e^{ax}\,dx, \\ & f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

L'intégrale qui figure au second membre de cette formule est une fonction de a ; on l'appelle *fonction de Binet* et on la désigne par $\Omega(a)$. On a donc

$$(27) \qquad \Omega(a) = \int_{-\infty}^{0} f(x) e^{ax}\,dx.$$

En remplaçant dans la formule (26) l'intégrale I par sa valeur rappelée à la fin du n° précédent, on obtient la formule

$$(28) \qquad \operatorname{Log} \Gamma(a) = \operatorname{Log} \sqrt{2\pi} + \left(a - \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} a - a + \Omega(a).$$

Quand a tend vers l'infini, $\Omega(a)$ tend vers 0, de sorte qu'en négligeant $\Omega(a)$ dans la formule précédente, on obtient la valeur asymptotique de $\operatorname{Log} \Gamma(a)$. Mais nous allons examiner, dans le n° suivant, les formules d'approximation de $\Omega(a)$.

65. Série et formule de Stirling. — Dans l'intégrale (27), remplaçons $f(x)$ par le développement trouvé au n° 48 (form. 4) $(0 < \theta < 1)$

$$(29) \qquad f(x) = \frac{B_2}{2!} + \frac{B_4 x^2}{4!} + \dots + \frac{B_{2n-2} x^{2n-4}}{(2n-2)!} + \theta \frac{B_{2n} x^{2n-2}}{(2n)!};$$

observons que chaque terme s'intègre par la formule

$$\int_{-\infty}^{0} x^{2k} e^{ax} dx = \int_{0}^{\infty} x^{2k} e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(2k+1)}{a^{2k+1}} = \frac{(2k)!}{a^{2k+1}}$$

et que l'on peut, sans changer la signification générale de θ, en vertu du théorème de la moyenne, faire sortir θ du signe $\int$; nous obtenons la *série de Stirling*, avec l'expression du reste R,

$$(30)\quad \begin{cases} \Omega(a) = \dfrac{B_2}{1.2}\dfrac{1}{a} + \dfrac{B_4}{3.4}\dfrac{1}{a^3} + \ldots + \dfrac{B_{2n-2}}{(2n-1)(2n-2)}\dfrac{1}{a^{2n-3}} + R, \\ R = \theta \dfrac{B_{2n}}{(2n-1)2n}\dfrac{1}{a^{2n-1}}, \qquad (0 < \theta < 1). \end{cases}$$

En particulier, en faisant $n = 1$, la série se réduit à R ; et il vient, B_2 étant égal $\frac{1}{6}$,

$$(31)\qquad \Omega(a) = \theta \frac{B_2}{2a} = \frac{\theta}{12a}.$$

Si l'on remplace $\Omega(a)$ par cette expression dans la formule (28), on obtient la *formule de Stirling* :

$$(32)\quad \begin{cases} \operatorname{Log}\Gamma(a) = \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} + \left(a - \dfrac{1}{2}\right)\operatorname{Log} a - a + \dfrac{\theta}{12a}, \\ \Gamma(a) = \sqrt{2\pi}\, a^{a-\frac{1}{2}} e^{-a+\frac{\theta}{12a}}. \end{cases}$$

Lorsque a est égal à un entier m, cette formule, multipliée par m, s'écrira sous la forme

$$1.2.3\ldots m = \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m e^{\frac{\theta}{12m}},$$

résultat qui a une grande importance dans le calcul des probabilités.

66. Remarques sur la série de Stirling. — La série (30) porte le nom de *Stirling*, qui l'a considérée le premier mais sans faire connaître l'expression du reste. Celle-ci est due à *Cauchy*. La série de Stirling prolongée indéfiniment est divergente, quel que soit le nombre positif a, car, en recourant à l'expression (3) donnée au n° 48 des nombres de Ber-

noulli, on reconnaît facilement que son terme général croît au delà de toute limite avec n.

Mais il est très remarquable que la série de Stirling, malgré sa divergence, fournisse un procédé très exact et très commode pour le calcul de $\Omega(a)$; et l'approximation que l'on peut obtenir par cette voie est d'autant plus grande que a est plus considérable. Effectivement, cette série est ce qu'on nomme une série *pseudo-convergente*. Si a est considérable, les termes commencent par décroître très rapidement au début de la série, et la formule (30) montre que l'erreur commise est de même signe et moindre en valeur absolue que le premier terme négligé. On aura donc la plus grande approximation possible en arrêtant la série au terme qui précède le terme minimum, et ce terme minimum sera lui-même une limite de l'erreur commise.

67. Valeur asymptotique de $\mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,\Gamma(a)$. — Si l'on dérive les formules (27) et (28), on en tire

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,\Gamma(a) &= \mathrm{Log}\,a - \frac{1}{2a} + \Omega'(a), \\ \Omega'(a) &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\, x e^{ax}\, dx. \end{aligned}\right.$$

En remplaçant dans cette intégrale $f(x)$ par son développement (29), il vient, comme plus haut, θ étant compris entre 0 et 1,

$$\Omega'(a) = -\frac{B_2}{2a^2} - \frac{B_4}{4a^4} - \cdots - \frac{B_{2n-2}}{(2n-2)a^{2n-2}} - \frac{\theta B_{2n}}{2na^{2n}}.$$

Ce résultat coïncide avec celui qu'on obtiendrait en dérivant directement la série de Stirling. Cette nouvelle série est *pseudo-convergente* comme celle de Stirling et elle convient de la même manière au calcul approché de $\Omega'(a)$ quand a est grand.

Les formules précédentes fournissent le moyen le plus simple de calculer la constante C d'Euler. On tire de la formule établie au n° 58, et pour m entier,

$$\mathrm{C} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m-1} - \mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,\Gamma(m),$$

Il suffit de choisir m suffisamment grand et d'évaluer la valeur de $\mathrm{D}\,\mathrm{Log}\,\Gamma(m)$ par les formules précédentes ; on obtiendra C avec une approximation aussi grande que l'on voudra.

Par exemple, en faisant $m = 10$ et en prenant les six premiers termes du développement de $\Omega'(m)$, on obtient déjà C avec quinze décimales exactes [1].

68. Valeur asymptotique de $\operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)$. Si l'on remplace a par $\left(a+\frac{1}{2}\right)$ dans la formule (24) et qu'on soustraie l'équation ainsi obtenue de (25), tous les termes qui ne contiennent pas e^{ax} en facteur sous le signe d'intégration se détruisent encore, et il vient

$$(34)\quad \begin{cases} \mathrm{I} - \operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{F}(x)\, e^{ax}\, dx \\ \mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x - 1}\right). \end{cases}$$

Nous poserons

$$\Omega_1(a) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{F}(x)\, e^{ax}\, dx\,;$$

alors, en remplaçant I par sa valeur, nous obtenons

$$(35)\quad \operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = a(\operatorname{Log} a - 1) + \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} - \Omega_1(a).$$

Si a augmente indéfiniment, $\Omega_1(a)$ tend vers 0, donc *l'intégrale de Raabe est la valeur asymptotique de* $\operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)$.

69. Relation entre $\Omega(a)$ **et** $\Omega_1(a)$. — Cette formule se tire de la formule de Legendre (n° 54) :

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a),$$

d'où

$$\operatorname{Log}\Gamma(a) + \operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \operatorname{Log}\sqrt{\pi} - (2a-1)\operatorname{Log}2 + \operatorname{Log}\Gamma(2a).$$

Remplaçons $\operatorname{Log}\Gamma(a)$ et $\operatorname{Log}\Gamma(2a)$ par leurs valeurs tirées de la formule (28), puis $\operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)$ par sa valeur tirée de (35). Il restera, après la suppression des termes qui se détruisent,

$$(36)\qquad \Omega_1(a) = \Omega(a) - \Omega(2a).$$

[1] Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral*, t. II, 1877, p. 228.

70. Intégrales de Schaar. — Les fonctions $\Omega(a)$ et $\Omega_1(a)$ peuvent s'exprimer par des intégrales de différentielles *rationnelles par rapport à a*. Ces formules très remarquables sont dues à Schaar et nous allons les faire connaître.

Considérons d'abord $\Omega(a)$. La fonction $f(x)$ de la formule (26) a été développée en série de fractions (n° 45) ; on a trouvé

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{2}{x^2 + 4k^2\pi^2}.$$

Les termes et la somme de cette série sont des fonctions continues et positives. Si l'on porte ce développement de $f(x)$ dans l'expression (27) de $\Omega(a)$, on peut intervertir les signes $\int$ et Σ (t. I, n° 326). On trouve ainsi

$$(37) \qquad \Omega(a) = \int_{-\infty}^0 f(x)\, e^{ax}\, dx = \sum_1^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{2e^{ax}\, dx}{x^2 + 4k^2\pi^2}.$$

Changeons dans chaque intégrale x en $\dfrac{2k\pi x}{a}$ et intervertissons de nouveau les signes Σ et $\int$, ce qui est permis, les termes de la nouvelle série étant encore des fonctions continues et positives ; il vient

$$(38) \quad \Omega(a) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} \sum_1^\infty \frac{e^{2k\pi x}}{k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} \operatorname{Log}(1 - e^{2\pi x}).$$

C'est la première formule de Schaar.

La seconde intégrale de Schaar s'obtient par la relation (36) ; il vient

$$\Omega_1(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} \operatorname{Log}(1 - e^{2\pi x}) - \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{2a\, dx}{4a^2 + x^2} \operatorname{Log}(1 - e^{2\pi x}).$$

On change x en $2x$ dans cette dernière intégrale ; il vient

$$(39)\ \Omega_1(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{-\infty} \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} \operatorname{Log}\frac{1 - e^{2\pi x}}{1 - e^{4\pi x}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} \operatorname{Log}(1 + e^{2\pi x})$$

ce qui est la seconde intégrale de Schaar.

71. Développement de $\Omega_1(a)$ suivant les puissances négatives de a. Formules asymptotiques de Gauss. — Si, dans les intégrales de Schaar, on substitue le développement $(0 < \theta < 1)$

$$\frac{a}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2 - \dots \left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^{n-1} + \theta\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^n\right],$$

et si l'on intègre terme à terme, en remarquant que θ peut sortir du signe $\int$ en vertu du théorème de la moyenne, on obtiendra les développements de $\Omega(a)$ et de $\Omega_1(a)$ suivant les puissances négatives de a avec l'expression du reste. On voit, sans qu'il soit nécessaire de l'écrire, que *ce reste est de même signe et moindre en valeur absolue que le premier terme négligé*.

Les coefficients de ces développements sont exprimés ainsi par des intégrales, mais il est inutile de considérer ces intégrales, car les coefficients du développement de $\Omega(a)$ ont déjà été calculés (30) :

$$\Omega(a) = \frac{B_2}{1.2}\frac{1}{a} + \frac{B_4}{3.4}\frac{1}{a^3} + \frac{B_6}{5.6}\frac{1}{a^5} + \dots$$

et ceux du développement de $\Omega_1(a)$ s'en déduisent par la relation (36),

$$\Omega_1(a) = \frac{B_2}{1.2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{a} + \frac{B_4}{3.4}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\frac{1}{a^3} + \frac{B_6}{5.6}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\frac{1}{a^5} + \dots$$

Cette série est divergente, mais elle est *pseudo-convergente* comme celle de Stirling : elle convient de la même manière au calcul approché, l'erreur commise étant égale à une fraction du premier terme négligé. Ainsi, en particulier, en prenant une fraction du premier terme, on a

$$\Omega_1(a) = \theta\frac{B_2}{1.2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{a} = \frac{\theta}{24a} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Si l'on porte cette approximation dans la formule (35), on obtient la *formule de Gauss*, qui est l'analogue de celle de Stirling, mais plus avantageuse,

$$(40) \quad \operatorname{Log}\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = a(\operatorname{Log} a - 1) + \operatorname{Log}\sqrt{2\pi} - \frac{\theta}{24a}.$$

Soit n un entier ; en faisant $a = n + \frac{1}{2}$, on obtient, pour l'évaluation des factorielles, la formule suivante, qui donne une meilleure approximation que celle de Stirling :

$$(41) \quad n! = \sqrt{2\pi}\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-\frac{\theta}{24n+12}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

CHAPITRE IV

Introduction à la théorie des séries trigonométriques

§ 1. Séries de Fourier. Conditions nécessaires et suffisantes de convergence

72. Séries trigonométriques. Formules d'Euler. — On appelle *série trigonométrique* une série de la forme

$$(1) \qquad \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx).$$

où x désigne une variable et a, b des coefficients constants. Si cette série converge quel que soit x, elle représente une fonction de période 2π.

C'est Euler en 1753 qui a posé la question de savoir si une fonction $f(x)$, arbitrairement donnée, mais de période 2π, peut être représentée par un développement de cette forme et c'est lui encore qui a trouvé les formules classiques pour la détermination des coefficients. Voici d'ailleurs à peu près comment il procède pour effectuer le développement de la fonction donnée $f(x)$.

Posons *a priori*

$$(2) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \Sigma(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

et proposons-nous de déterminer les coefficients. A cet effet, multiplions les deux membres par $\cos nx\, dx$ et intégrons terme à terme de 0 à 2π ; opérons de même, mais en multipliant par $\sin nx\, dx$; nous trouvons les *formules d'Euler* ou *de Fourier :*

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx,$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

En effet, les intégrales de $\cos mx \cos nx$, de $\sin mx \sin nx$ et de $\cos mx \sin nx$ sont nulles entre 0 et 2π si m est différent de n, tandis que, si $m = n$, la dernière seule est nulle et les deux premières sont égales à π (t. I, n° 186).

Mais il importe d'observer tout de suite que ce raisonnement postule : 1° la possibilité du développement ; 2° la légitimité de l'intégration terme à terme. Il ne prouve donc rien, tant que ces deux démonstrations n'ont pas été faites. Aussi importe-t-il d'abord de bien préciser les questions que nous allons traiter.

73. Séries et constantes de Fourier. Problèmes qu'elles soulèvent. — Soit $f(x)$ une fonction susceptible d'intégration. Les constantes a_n et b_n déterminées par les formules (3) s'appellent les *constantes de Fourier* de $f(x)$; la série trigonométrique (1) formée avec ces constantes comme coefficients et considérée au point de vue purement formel (qu'elle soit convergente ou non), s'appelle la *série de Fourier* de $f(x)$. Alors on se pose les questions suivantes :

La série de Fourier de $f(x)$ est-elle convergente ?

Si elle converge, a-t-elle pour somme $f(x)$?

Converge-t-elle *uniformément ?*

La fonction $f(x)$ peut-elle admettre un développement trigonométrique autre que celui de Fourier ?

Ces questions ont donné lieu à une foule de travaux intéressants dont nous allons exposer quelques résultats. Aucune d'elles cependant ne peut encore être considérée comme complètement épuisée.

74. Hypothèses sur $f(x)$. — La fonction $f(x)$ dont nous allons étudier le développement sera, jusqu'à la fin du chapitre, soumise aux deux conditions suivantes : 1° c'est une fonction *périodique* de période 2π ; 2° elle est *intégrable* par les procédés que nous connaissons.

Si $f(x)$ est *absolument* intégrable, c'est-à-dire si $|f(x)|$ est intégrable, la série est une série de Fourier au sens *propre*. Dans le cas contraire, la série de Fourier de $f(x)$ est *impropre*. Nous ne nous occuperons de ces dernières qu'à la fin du chapitre.

75. Sommation de la série de Fourier par l'intégrale de Dirichlet. — Soit donc $f(x)$ une fonction de période 2π et *intégrable*. Ses constantes de Fourier sont bien déterminées par les intégrales existantes :

$$(4)\qquad a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha.$$

D'ailleurs, par suite de la périodicité de la fonction sous le signe, on peut remplacer l'intervalle d'intégration par tout autre de même amplitude 2π. On a ainsi, en particulier,

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha.$$

Soit S_m la somme des $m+1$ premiers termes de la série de Fourier de f, à savoir

$$S_m = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^m (a_k\cos kx + b_k \sin kx).$$

Elle devient, par la substitution des valeurs des coefficients,

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_1^m \cos k(\alpha - x)\right] f(\alpha)\, d\alpha\,;$$

ou encore, en remplaçant la variable d'intégration α par $\alpha + x$,

$$S_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_1^m \cos k\alpha\right] f(\alpha + x)\, d\alpha.$$

Mais, en sommant pour $k = 1, 2, \dots m$ les m équations :

$$\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)\alpha = 2\cos k\alpha \sin\frac{1}{2}\alpha,$$

puis en divisant par $2\sin\frac{1}{2}\alpha$, on trouve

$$(5)\qquad \frac{1}{2} + \sum_1^m \cos k\alpha = \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Enfin, en substituant ce résultat dans la valeur de S_m, on exprime S_m par l'intégrale suivante, connue sous le nom d'*intégrale de Dirichlet* :

$$(6)\qquad S_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + \alpha)\frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\, d\alpha.$$

La convergence de la série de Fourier revient donc à la convergence de cette intégrale quand m (entier) tend vers l'infini.

Dans l'étude de cette convergence, le théorème suivant est tout à fait fondamental.

76. Théorème. — *Si la fonction* $F(z)$ *est absolument intégrable* (n° 74), *les deux intégrales*

$$\int_a^b F(z)\sin kz\,dz, \qquad \int_a^b F(z)\cos kz\,dz,$$

tendent vers 0 *quand* k *tend vers l'infini d'une manière quelconque.*

En particulier, les constantes de Fourier, a_m *et* b_m, *d'une fonction* $f(x)$ *absolument intégrable tendent vers* 0 *quand* m *tend vers l'infini.*

Il suffit de prouver le théorème pour la première des deux intégrales, le raisonnement étant le même pour l'autre.

Premier cas. — *Si* $F(z)$ *est continue dans l'intervalle* (a, b), cette première intégrale ne diffère de chacune des deux suivantes :

$$\int_{a+\frac{\pi}{k}}^{b} \quad \text{et} \quad \int_a^{b-\frac{\pi}{k}} F(z)\sin kz\,dz$$

que par des intégrales infiniment petites avec l'intervalle d'intégration supprimé. Il suffit donc de montrer que la somme de ces deux-ci tend vers 0. Or cette somme, après la substitution de $z+\frac{\pi}{k}$ à z dans son premier terme, s'écrit

$$\int_a^{b-\frac{\pi}{k}} \left[F(z) - F\left(z+\frac{\pi}{k}\right)\right] \sin kz\,dz.$$

Quand k tend vers l'infini, la différence entre crochets tend uniformément vers 0, donc l'intégrale tend vers 0.

Deuxième cas. — *Si* $F(z)$ *est discontinue en un nombre limité de points*, on peut admettre que ce soit aux extrémités a et b seulement, car l'intégrale considérée peut se décomposer en plusieurs autres satisfaisant à cette condition. Alors

il suffit, ce qui ramène au premier cas, de démontrer le théorème pour la seconde des deux intégrales suivantes :

$$\int_a^b F(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha, \qquad \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} F(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha,$$

car leur différence est moindre que celle des deux intégrales de $|F|\,d\alpha$ prises respectivement entre les mêmes limites : elle est donc aussi petite qu'on veut avec ε.

Troisième cas. — Si $F(\alpha)$ est à variation bornée, il suffit de faire la démonstration pour F *positive* et *croissante*, car toute fonction à variation bornée est la différence de deux fonctions positives et croissantes (n° 33). Ensuite, si F est positive et croissante, on a, par le second théorème de la moyenne (n° 2), dont la démonstration s'applique aussi bien à ce cas,

$$\int_a^b F(\alpha)\sin k\alpha\, d\alpha = F(b)\int_\xi^b \sin k\alpha\, d\alpha = F(b)\,\frac{\cos k\xi - \cos kb}{k}.$$

Cette expression tend vers 0 pour $k=\infty$.

77. Convergence uniforme des intégrales précédentes. — 1° Dans les deux intégrales du théorème précédent, considérons les limites a et b comme variables, mais dans un intervalle fixe (A, B) dans lequel $|F|$ est intégrable. Alors ces intégrales varient avec a, b moins rapidement que l'intégrale, fonction continue de a, b et indépendante de k,

$$\int_a^b |F|\, d\alpha.$$

Donc les intégrales du théorème sont fonctions *uniformément continues de a, b : elles tendent donc uniformément vers 0 quand k tend vers l'infini*, puisqu'elles tendent vers 0 pour tout système particulier a, b.

2° Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_a^b F(\alpha + x)\sin k\alpha\, d\alpha,$$

qui dépend de x variable, mais de telle façon que la variable $t=\alpha+x$ ne sorte pas d'un intervalle (A, B) où $|F(t)|$ est

intégrable. Par la substitution de $\alpha - x$ à α, cette intégrale se décompose en deux autres, multipliées par des facteurs de modules < 1,

$$\cos kx \int_{a+x}^{b+x} F(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha - \sin kx \int_{a+x}^{b+x} F(\alpha) \cos k\alpha \, d\alpha,$$

auxquelles s'applique le raisonnement précédent. Donc *elle converge encore uniformément vers 0 pour k infini.*

3° Considérons enfin l'intégrale plus générale

$$\int_a^b F(\alpha + x)\, \Omega(\alpha) \sin k\alpha \, d\alpha,$$

où nous supposerons que $\Omega(\alpha)$ admet une dérivée continue $\Omega'(\alpha)$. Dans les mêmes conditions que la précédente, *elle tend uniformément vers 0 quand k tend vers l'infini.*

Posons, en effet,

$$\Phi(\alpha) = \int_a^\alpha F(\alpha + x) \sin k\alpha \, d\alpha\,;$$

cette intégrale devient, par intégration par parties,

$$\Phi(b)\,\Omega(b) - \int_a^b \Phi(\alpha)\, \Omega'(\alpha)\, d\alpha,$$

et elle tend uniformément vers zéro avec Φ, auquel s'applique la démonstration précédente.

Il peut se faire que $\Omega(\alpha)$ dépende de k. La démonstration précédente subsiste alors sous la condition que Ω et Ω' restent bornés quand k tend vers l'infini.

78. Théorème de Riemann. — *La manière dont se comporte la série de Fourier de $f(x)$ au point x ne dépend que de la nature de $f(x)$ dans le voisinage du point x, pourvu que $f(x)$ soit absolument intégrable.*

En effet, si nous désignons par $\Omega(\alpha)$ la fonction $1 : 2 \sin \frac{1}{2}\alpha$, qui est continue ainsi que sa dérivée dans les intervalles $(-\pi, -\varepsilon)$ et (ε, π) quelque petit que soit ε positif, l'intégrale (6), qui exprime S_m (n° 75), devient

$$S_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x + \alpha)\, \Omega(\alpha) \sin (m + \tfrac{1}{2})\alpha \, d\alpha.$$

Donc, en négligeant deux portions de cette intégrale qui tendent uniformément vers zéro quand m tend vers l'infini (n° 77), on voit que cette intégrale converge vers la même limite et de la même manière (uniforme ou non) que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+\alpha)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha.$$

79. Forme préliminaire de la condition nécessaire et suffisante de convergence. — Nous allons chercher la condition pour que la série de Fourier d'une fonction absolument intégrable converge vers une limite déterminée S. Ainsi, S est une quantité indépendante de m mais généralement fonction de x. Multiplions par S la relation

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha,$$

qui s'obtient en intégrant les deux membres de la formule (5) du n° 75 ; puis soustrayons-la de l'équation (6) du même numéro. Il vient

$$(7)\qquad S_m - S = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-S]\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha.$$

Donc, *pour que la série de Fourier converge vers* S, *il faut et il suffit qu'à tout nombre* ω *positif donné, corresponde un entier positif* M, *tel que l'intégrale* (7) *soit de valeur absolue* $<\omega$ *sous la condition* $m>$ M. *De plus,* M *devra être indépendant de x pour que la convergence soit uniforme.*

Mais, dans cet énoncé, nous allons successivement remplacer l'intégrale (7) par d'autres plus simples. D'abord par

$$(8)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+\alpha)-S]\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]\frac{d\alpha}{\alpha},$$

ce qui est permis, parce que la différence des deux intégrales tend uniformément vers 0 en vertu des conclusions du n° 77. Cette différence est, en effet, de la forme

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x+\alpha)\sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]\left[\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}-\frac{1}{\alpha}\right]d\alpha,$$

où le dernier crochet est une fonction $\Omega(\alpha)$ continue ainsi que sa dérivée. En second lieu, on peut, remplacer l'intégrale (8) par la suivante, où ε est un nombre positif aussi petit qu'on veut, mais indépendant de m (et de x),

$$(9) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [f(x+\alpha)-S] \sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]\frac{d\alpha}{\alpha},$$

car on néglige seulement deux portions de l'intégrale (8) qui tendent (uniformément) vers zéro quand m tend vers l'infini.

Partageons l'intégrale (9) en deux autres, l'une aux limites $-\varepsilon$ et 0, l'autre aux limites 0 et ε ; puis ramenons la première aux mêmes limites que la seconde par le changement de signe de α ; l'intégrale (9) sera remplacée par l'intégrale (11) de la règle suivante, que nous sommes maintenant en droit d'énoncer.

80. Règle de convergence. *La condition nécessaire et suffisante pour que la série de Fourier d'une fonction absolument intégrable $f(x)$ converge (uniformément) vers S est que, quelque petit que soit le nombre positif donné ω, on puisse lui faire correspondre deux nombres ε et M (indépendants de x) tels qu'en posant*

$$(10) \qquad \varphi(\alpha) = f(x+\alpha)+f(x-\alpha)-2S,$$

l'intégrale

$$(11) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\varepsilon} \varphi(\alpha) \sin\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]\frac{d\alpha}{\alpha}$$

soit de module $<\omega$ pour tout entier $m > M$.

Dans cette règle, *on peut laisser tomber la condition que m soit entier*. En effet, si l'on retranche de l'intégrale précédente celle qu'on en déduit en remplaçant m par $(m+\theta)$ où θ est une fraction et m un entier, on trouve, après avoir transformé $\sin\left(m+\theta+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha$ en produit,

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\varepsilon} \varphi(\alpha)\frac{\sin\frac{\theta\alpha}{2}}{\alpha}\cos\left[\left(m+\frac{\theta+1}{2}\right)\alpha\right]d\alpha,$$

et l'on voit que cette différence tend uniformément vers 0 pour m infini, d'après les conclusions du n° 77.

§ 2. Critères de convergence des séries de Fourier

Donnons d'abord quelques définitions générales :

81. Points de discontinuité de 1re espèce. Points réguliers. Fonctions à variation bornée. — Nous dirons, avec M. Lebesgue, que le point x_0 est un *point de discontinuité de première espèce* de $f(x)$ si cette fonction a une limite finie $f(x_0 - 0)$ quand x tend vers x_0 en croissant, et une autre $f(x_0 + 0)$ quand x tend vers x_0 en décroissant. Si ces deux limites étaient égales, la fonction serait continue au point x_0.

Nous dirons encore, avec M. Lebesgue, que le point x_0 est un *point régulier* si $f(x_0 - 0)$ et $f(x_0 + 0)$ existent et que $f(x_0)$ soit leur moyenne arithmétique. En particulier, tout point où f est continue est régulier.

Les points de discontinuité d'une fonction bornée non décroissante (ou non croissante) sont toujours de première espèce, en vertu d'un principe général de la théorie des limites (t. I, n° 16).

Une fonction à variation bornée (n° 33) est la différence de deux fonctions φ et ψ bornées et non décroissantes. Elle ne peut donc avoir que des points de discontinuité de première espèce.

Dirichlet, qui a traité le premier rigoureusement la théorie des séries de Fourier, a considéré des fonctions bornées n'ayant qu'un nombre limité d'extrémés. Ce sont les fonctions qui satisfont aux *conditions de Dirichlet*. Elles sont évidemment à variation bornée.

82. Choix de S. — Pour les fonctions dont nous venons de parler, on peut choisir la valeur de la quantité S qui entre dans la définition (10) de $\varphi(\alpha)$, à savoir

$$\varphi(\alpha) = f(x + \alpha) + f(x - \alpha) - 2S,$$

de manière que $\varphi(\alpha)$ tende vers 0 avec α. Il doit être entendu que S reçoit alors cette valeur.

Ainsi, si la fonction est *continue* ou régulière au point x, on fait $S = f(x)$; si x est un point de discontinuité de première espèce, on fait

$$S = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

83. Premier critère de convergence (DINI). — *La série de Fourier d'une fonction absolument intégrable $f(x)$ converge vers $f(x)$ en tout point régulier tel que l'intégrale*

$$\int_0^\varepsilon \varphi(\alpha)\frac{d\alpha}{\alpha}$$

existe.

C'est la conséquence de la règle du n° 80. Quel que soit ω positif, on peut alors prendre ε assez petit pour que cette intégrale soit $< \omega$, auquel cas l'intégrale (11) l'est *a fortiori* quel que soit m. Si cette condition se réalise avec ε indépendant de x, la convergence sera uniforme.

Ce critère donne lieu à autant de cas particuliers qu'il y a de règles d'existence pour l'intégrale. Par exemple, l'intégrale existe si $\varphi(\alpha)$ est infiniment petit d'ordre > 0 quand α tend vers 0.

Donc la série de Fourier converge en tout point x tel que $f(x+\alpha) - f(x)$ soit infiniment petit d'ordre $r > 0$ pour $\alpha = 0$. En particulier, toute fonction dérivable est représentable en série de Fourier.

84. Deuxième critère (C. JORDAN). — *La série de Fourier d'une fonction absolument intégrable, $f(x)$, converge dans tout intervalle, si petit soit-il, où $f(x)$ est à variation bornée. De plus, la convergence sera uniforme dans un intervalle intérieur à un intervalle de continuité. La somme S de la série sera $f(x)$ en tout point régulier; en un point de discontinuité non régulier, ce sera*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Remarquons que si $f(x)$est à variation bornée, $\varphi(\alpha)$ l'est aussi et est, par conséquent, la différence de deux fonctions positives non décroissantes qui tendent vers 0 avec α (uniformément

pour x variable si $f(x)$ est continue). Or, si la condition de la règle du n° 80 se vérifie pour deux fonctions, elle se vérifiera pour leur différence. Il suffit donc de la vérifier en supposant φ positive, non décroissante et tendant (uniformément) vers 0 avec α. On a, dans ce cas, en remplaçant $m + \frac{1}{2}$ par k, et transformant par le second théorème de la moyenne,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\varepsilon} \varphi(\alpha) \sin k\alpha \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\pi}\int_{\varepsilon'}^{\varepsilon} \frac{\sin k\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\pi}\int_{k\varepsilon'}^{k\varepsilon} \frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

Cette quantité est en valeur absolue moindre que [1]

$$\frac{1}{\pi}\,|\,\varphi(\varepsilon)\,|\int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha < \varphi(\varepsilon) \quad .$$

La condition de la règle se vérifiera, ω étant donné, en prenant ε assez petit pour qu'on ait $|\,\varphi(\varepsilon)\,| < \omega$. Enfin, à l'intérieur d'un intervalle de continuité de f, cette condition peut se réaliser avec un ε indépendant de x, ce qui achève la démonstration.

85. Troisième critère. — *La série de Fourier d'une fonction $f(x)$ absolument intégrable converge vers la limite pour $\alpha = 0$ de la fonction*

$$\frac{1}{2\alpha}\int_0^{\alpha} [f(x + \alpha) + f(x - \alpha)]\, d\alpha,$$

en tout point x tel que cette fonction de α soit à variation bornée dans l'intervalle $(0, \varepsilon)$.

Soit S cette limite, toujours existante dans notre hypothèse. Substituons-la dans $\varphi(\alpha)$ (n° 82); la fonction *à variation bornée :*

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \varphi(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} [f(x + \alpha) + f(x - \alpha) - 2S]\, d\alpha$$

tend vers 0 avec α et je dis que la règle du n° 80 est applicable.

En effet, écrivons k au lieu de $m + \frac{1}{2}$ et intégrons par par-

[1] En effet, l'intégrale de $k\varepsilon'$ à $k\varepsilon$ est la différence de celles de 0 à $k\varepsilon$ et de 0 à $k\varepsilon'$. Ces deux-ci sont positives et $<$ que l'intégrale de 0 à π, parce que cette dernière mesure la plus grande arcade de la courbe $\varphi = \sin \alpha : \alpha$ qui se compose d'une suite d'arcades décroissantes de signes alternés. D'autre part, $\sin \alpha : \alpha$ est $<$ 1.

ties l'intégrale de l'énoncé de cette règle. Il vient

$$\int_0^\varepsilon \varphi(\alpha) \sin k\alpha \frac{d\alpha}{\alpha} = \Psi(\varepsilon) \sin k\varepsilon - \int_0^\varepsilon \Psi(\alpha)\, \alpha\, d\frac{\sin k\alpha}{\alpha}.$$

Soit ω positif donné. On peut prendre ε assez petit pour que le terme intégré soit $< \omega$ quel que soit k (donc m), car $\varphi(\varepsilon)$ tend vers 0 avec ε, donc $\Psi(\varepsilon)$ aussi. Reste à montrer qu'on peut aussi réaliser cette condition pour l'intégrale.

Comme Ψ est à variation bornée, on peut, ainsi que dans le numéro précédent, raisonner sur Ψ comme sur une fonction positive non décroissante. Alors, par le second théorème de la moyenne, l'intégrale revient à

$$\Psi(\varepsilon) \int_{\varepsilon'}^\varepsilon \alpha d \frac{\sin k\alpha}{\alpha} = \Psi(\varepsilon) \left[\sin k\alpha\right]_{\varepsilon'}^\varepsilon - \Psi(\varepsilon) \int_{\varepsilon'}^\varepsilon \frac{\sin k\alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Donc, en prenant ε et, avec lui, $\Psi(\varepsilon)$ assez petits, on rendra la valeur absolue de cette expression $< \omega$ quel que soit k.

Si $\Psi(\varepsilon)$ tend uniformément vers 0 quand x varie, la convergence sera *uniforme*.

Il est assez facile de montrer que ce criterium contient les deux précédents.

§ 2. Exemples de développements en séries de Fourier

86. Cas de fonctions non périodiques. Séries de sinus et séries de cosinus. — On peut avoir à développer une fonction non périodique dans un intervalle d'amplitude 2π, par exemple, dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$. On revient alors au cas de la fonction périodique par l'artifice suivant :

Soit $F(x)$ la fonction proposée. On lui substitue une fonction $f(x)$ de période 2π, définie par la condition d'être égale à $F(x)$ dans l'intervalle $(-\pi+0, \pi)$. Le développement de $f(x)$ en série de Fourier sera celui de $F(x)$ dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$.

Les propriétés de $f(x)$ feront connaître la manière dont la série se comporte aux extrémités de l'intervalle. Supposons $F(x)$ et, par suite, $f(x)$ à variation bornée. Pour $x = \pi$, la somme de la série sera

$$\frac{f(\pi - 0) + f(\pi + 0)}{2} = \frac{F(\pi - 0) + F(-\pi + 0)}{2}.$$

Donc, si F est continue mais non périodique, les extrémités de l'intervalle se comportent exactement comme des points de discontinuité. Au contraire, si F est continue et reprend la même valeur aux points $x = \pm \pi$, la convergence sera uniforme dans tout intervalle d'après le critère de Jordan (n° 84).

On peut aussi se proposer de développer $F(x)$ en série de cosinus (ou de sinus) seuls dans un intervalle d'amplitude π, par exemple dans $(0, \pi)$. On substitue alors à $F(x)$ une fonction $f(x)$, paire (ou impaire), de période 2π, définie par la condition d'être égale à $F(x)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$. Le développement de $f(x)$ sera le développement cherché, car il ne contient que des cosinus si f est paire, que des sinus si f est impaire.

87. Exemples de séries de sinus. — Les coefficients b_m du développement en série du sinus sont (f étant impaire) fournis par les formules

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\alpha)\sin m\alpha\, d\alpha\right],$$

d'où, en changeant α en $\pi - \alpha$ dans la dernière intégrale,

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\alpha) - (-1)^m f(\pi - \alpha)] \sin m\alpha\, d\alpha.$$

Premier exemple. — Soit à développer $\pi : 4$ dans l'intervalle $(0, \pi)$; on a $f(\alpha) = f(\pi - \alpha)$, donc $b_{2k} = 0$ et

$$b_{2k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2k+1}.$$

Par conséquent, entre 0 et π (limites exclues),

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots$$

Entre $-\pi$ et 0, la série a pour somme $-\pi : 4$. Pour $x = 0$, sa valeur est 0, moyenne des valeurs de part et d'autre de ce point, conformément aux théories générales.

Deuxième exemple. — Soit à développer $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ dans l'intervalle $(0, \pi)$. On a $f(\alpha) = -f(\pi - \alpha)$, donc $b_{2k+1} = 0$ et, en intégrant par parties,

$$b_{2k} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \sin 2k\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2k} - \frac{1}{k\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2k\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2k}.$$

Par conséquent, entre 0 et π (limites exclues),

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} + \dots$$

et la série est encore discontinue pour $x = 0$.

Si l'on soustrait ce développement du précédent, il vient

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

et, les deux membres étant impairs, cette nouvelle formule est valable entre $-\pi$ et $+\pi$ (limites exclues).

De même, en ajoutant les mêmes développements,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

et cette formule est valable de 0 à 2π (limites exclues), parce que les deux membres changent seulement de signe quand on change x en $2\pi - x$.

88. Exemples de séries de cosinus. — Les coefficients a_m du développement en série de cosinus sont (f étant paire) fournis par les formules

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} = \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\alpha) \cos m\alpha \, d\alpha\right],$$

d'où, en changeant α en $\pi - \alpha$ dans la dernière intégrale,

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(\alpha) + (-1)^m f(\pi - \alpha)] \cos m\alpha \, d\alpha.$$

Premier exemple. — Soit à développer $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ dans l'intervalle $(0, \pi)$. Comme $f(\alpha) = -f(\pi - \alpha)$, on a $a_{2k} = 0$ et, en intégrant par parties,

$$a_{2k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \cos (2k+1)\alpha \, d\alpha = \frac{2}{(2k+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin (2k+1)\alpha \, d\alpha,$$

d'où $a_{2k+1} = 2 : (2k+1)^2 \pi$. Par conséquent,

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right].$$

Cette égalité est valable entre 0 et π, limites comprises.

Deuxième exemple. — Soit à développer $\sin px$ (p entier) dans l'intervalle $(0, \pi)$.

Si p est pair, $f(\alpha) = -f(\pi - \alpha)$; donc $\alpha_{2k} = 0$ et

$$a_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin p\alpha \cos (2k+1)\alpha \, d\alpha = \frac{4p}{\pi} \frac{1}{p^2 - (2k+1)^2}.$$

Si p est impair, $f(\alpha) = f(\pi - \alpha)$; donc $a_{2k+1} = 0$, et

$$a_{2k} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin p\alpha \cos 2k\alpha \, d\alpha = \frac{4p}{\pi} \frac{1}{p^2 - (2k)^2}.$$

Il vient, en définitive, entre 0 et π,

$$\sin px = \begin{cases} \dfrac{4p}{\pi}\left[\dfrac{\cos x}{p^2 - 1} + \dfrac{\cos 3x}{p^2 - 3^2} + \dfrac{\cos 5x}{p^2 - 5^2} + \dots\right] & (p \text{ pair}) \\ \dfrac{4p}{\pi}\left[\dfrac{1}{2p^2} + \dfrac{\cos 2x}{p^2 - 2^2} + \dfrac{\cos 4x}{p^2 - 4^2} + \dots\right] & (p \text{ impair}). \end{cases}$$

Troisième exemple. — Soit à développer $\operatorname{Log}\left(2 \sin \frac{x}{2}\right)$ en série de cosinus dans l'intervalle $(0, \pi)$. On a d'abord (t. I, n° 190)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Log}\left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = 2 \operatorname{Log} 2 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Log}\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) d\alpha = 0.$$

Ensuite, en intégrant par parties, puis par la formule (n° 5) du n° 75,

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos m\alpha \operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha = -\frac{1}{m\pi}\int_0^\pi \frac{\sin m\alpha \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha$$

$$= -\frac{1}{m\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha - \frac{1}{m\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha = -\frac{1}{m}.$$

On a donc, entre 0 et π,

$$-\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots$$

Si l'on écrit au premier membre $-\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)$, les deux membres seront pairs de période 2π et la formule subsistera quel que soit x. La fonction considérée ici n'est plus bornée, elle est, en effet, infinie pour $x = k\pi$.

§ 4. Séries de Fourier quelconques

89. Intégration des séries de Fourier. — THÉORÈME. — *Une série de Fourier (même divergente) de fonction absolument intégrable* (n° 71) *peut toujours être intégrée terme à terme dans un intervalle. Si les limites de l'intervalle varient, la convergence est uniforme.* (LEBESGUE).

En effet, considérons le développement formel

$$(1) \qquad f(x) - \frac{1}{2}a_0 \longrightarrow \sum_1^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

le signe $\longrightarrow$ signifiant seulement que le second membre est la série de Fourier du premier, donc que a_m et b_m sont les constantes de Fourier de $f(x)$.

Soit $F(x)$ l'intégrale du premier membre entre 0 et x ; on aura la relation

$$(2) \qquad F(2\pi) = \int_0^{2\pi}\left[f(x) - \frac{a_0}{2}\right]dx = 0.$$

Mais F, étant continue et à variation bornée et s'annulant aux limites 0 et 2π, peut se développer en série de Fourier *uniformément convergente* entre 0 et 2π (n[os] 84 et 86), sous la forme

$$(3) \qquad F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_1^\infty (A_m \cos mx + B_m \sin mx).$$

Les coefficients de Fourier de F se ramènent à ceux de f par une intégratiou par parties. En effet, les termes aux limites s'annulant par (2), il vient, pour $m \geqslant 1$,

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos mx\,dx = -\frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi} F'(x)\sin mx\,dx = -\frac{b_m}{m},$$

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin mx\,dx = \frac{1}{m\pi}\int_0^{2\pi} F'(x)\cos mx\,dx = \frac{a_m}{m}.$$

Substituons ces valeurs dans (3). Eliminons ensuite A_0 et soustrayons membre à membre de l'équation (3) ainsi transformée celle qu'elle fournit pour $x = 0$. Nous trouvons, pour x compris entre 0 et 2π, le développement uniformément convergent

$$F(x) = \sum_1^\infty \frac{b_m(1 - \cos mx) + a_m \sin mx}{m}.$$

C'est précisément ce qu'on obtient en intégrant le second membre de (1). L'intégration est donc permise entre 0 et 2π et, par suite, dans tout intervalle à cause de la périodicité.

90. Sommation des séries de Fourier divergentes. — *Sommer une série de Fourier divergente, c'est, connaissant cette série, déterminer la fonction génératrice.* En d'autres termes, c'est *déterminer $f(x)$ quand on connaît ses constantes de Fourier.*

Le théorème précédent fournit un premier procédé pour résoudre cette question, car il permet de déterminer l'intégrale indéfinie de $f(x)$ et, par conséquent, $f(x)$ lui-même partout où $f(x)$ est la dérivée de son intégrale indéfinie, en particulier partout où $f(x)$ est continue.

Ce procédé de sommation est indirect. On peut aussi se servir des procédés généraux de sommation des séries diver-

gentes étudiés par M. Borel (*Leçons sur les séries divergentes*). Nous allons indiquer en quoi ils consistent.

91. Procédé général de sommation des séries divergentes. — Le procédé de M. Borel consiste à multiplier les termes successifs de la série divergente proposée, à savoir

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots,$$

respectivement par des facteurs, fonctions d'un paramètre r :

$$a_0(r),\ a_1(r), \ldots\ a_n(r), \ldots$$

qui sont positifs et < 1, non croissants d'un facteur au suivant, et tendent tous vers l'unité quand r tend vers une certaine limite r_0. On forme ainsi une série auxiliaire

$$\Sigma a_n(r)\, u_n.$$

On s'arrange de manière qu'elle converge tant que r n'atteint pas sa limite. Alors si la somme de la série auxiliaire, qui dépend de r, tend vers une limite quand r tend vers r_0, cette limite sera, par définition, la somme (au sens généralisé) de la série proposée.

Cette généralisation serait évidemment inutile si l'on n'avait le théorème suivant :

Théorème. — *La somme d'une série au sens généralisé coïncide avec la somme au sens ordinaire chaque fois que la série converge.*

Les termes de la série auxiliaire tendent vers ceux de la proposée. Reste à montrer que l'on peut passer à la limite dans chaque terme et, à cet effet, que la convergence de la série proposée entraîne, pour r variable, la convergence *uniforme* de la série auxiliaire.

Soit ε un nombre positif. Posons

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \cdots$$

La série étant convergente, on peut assigner un nombre N tel que $|R_n|$ soit $< \varepsilon$ pour $n > N$. Le reste ρ_n de la série auxiliaire est

$$\begin{aligned}\rho_n &= a_n(R_n - R_{n+1}) + a_{n+1}(R_{n+1} - R_{n+2}) + a_{n+2}(R_{n+2} - R_{n+3}) + \cdots \\ &= a_n R_n + (a_{n+1} - a_n) R_{n+1} + (a_{n+2} - a_{n+1}) R_{n+2} + \cdots\end{aligned}$$

Tous les R sont de module $< \varepsilon$, toutes les parenthèses négatives, de sorte que, pour $n > \mathrm{N}$, on a aussi

$$\rho_n \leqq \varepsilon\,[a_n + (a_n - a_{n+1}) + \cdots] < 2\varepsilon a_n \leqq 2\varepsilon.$$

Donc, N étant indépendant de r, la convergence est uniforme.

92. Procédé de la moyenne arithmétique. — Le procédé de sommation qui précède avait déjà été appliqué par Poisson aux séries de Fourier. Poisson faisait $a_n = r^n$, r tendant vers l'unité. Nous avons fait connaître nous-mêmes un nouveau procédé du même genre (*). Nous laisserons ces méthodes de côté et nous allons étudier le *procédé de la moyenne arithmétique,* que M. Fejèr a appliqué avec beaucoup de succès à la théorie des séries de Fourier. Ce procédé, qui rentre aussi dans les procédés généraux de M. Borel, consiste à attribuer comme somme à la série considérée, dont les $n + 1$ premiers termes ont pour somme S_n, la limite pour n infini, quand elle existe, des quantités

$$(1) \qquad \sigma_n = \frac{\mathrm{S}_0 + \mathrm{S}_1 + \cdots + \mathrm{S}_{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,u_k.$$

Les facteurs a de la méthode de M. Borel sont ici de la forme $\left(1 - \frac{k}{n}\right)$ et tendent vers 1 quand le paramètre n (au lieu de r) tend vers l'infini. Mais les coefficients a deviennent tous nuls à partir d'un certain rang, ce qui peut être considéré comme un avantage, les sommes σ_n définissant alors *des suites trigonométriques finies.*

Quand la série est convergente, le procédé de la moyenne arithmétique coïncide avec le procédé de sommation ordinaire, en vertu du théorème du n° précédent. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Elle l'est cependant dans un cas important, comme le montre le théorème suivant :

93. Théorème de Hardy-Landau. — *Lorsqu'une série* $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ *est positive ou, plus généralement, telle que le produit* mu_m *reste supérieur à un nombre négatif*

(*) *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, n° 3, 1908.

fixe — A, alors, si la série est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique, elle est convergente et on lui trouve, par conséquent, la même somme par le procédé de sommation ordinaire.

Soit, comme ci-dessus,

$$S_m = \sum_0^m u_k, \qquad \sum_0^{m-1} S_k = m\sigma_m.$$

On en tire, pour tout entier $p < m$,

$$\sum_{m-p}^{m-1} S_k = m\sigma_m - (m-p)\sigma_{m-p} = p\sigma_{m-p} + m(\sigma_m - \sigma_{m-p}),$$

$$\sum_{m}^{m+p-1} S_l = (m+p)\sigma_{m+p} - m\sigma_m = p\sigma_{m+p} + m(\sigma_{m+p} - \sigma_m).$$

Mais on a, pour k compris entre $m-p$ et m, et pour l compris entre m et $m+p$, la parenthèse dans les expressions ci-dessous renfermant au plus p termes,

$$S_k = S_m - (u_{k+1} + \cdots + u_m) < S_m + p\,\frac{A}{m-p};$$

$$S_l = S_m + (u_{m+1} + \cdots + u_l) > S_m - p\,\frac{A}{m}.$$

Substituant ces limites dans les précédentes équations, et divisant par p, on en tire

$$S_m + \frac{p}{m-p}A > \sigma_{m-p} — \frac{m}{p}(\sigma_m - \sigma_{m-p})$$

$$S_m - \frac{p}{m}A < \sigma_{m+p} — \frac{m}{p}(\sigma_{m+p} - \sigma_m).$$

Soit S la limite de σ_m. Faisons tendre m vers l'infini, et $m-p$ avec lui, mais de manière que $p : m$ tende vers un nombre positif donné ε d'une petitesse arbitraire. Nous tirons des relations précédentes

$$\lim S_m + \frac{\varepsilon A}{1-\varepsilon} \geq S, \qquad \lim S_m - \varepsilon A \leq S.$$

Donc, ε étant arbitraire, $\lim S_m = S$.

94. Intégrale de Fejér. — Dans le cas des séries de Fourier, σ_m s'exprime par une intégrale remarquable, qu'il faut rapprocher de celle de Dirichlet, et que nous appellerons *intégrale de Fejér*.

La somme S_m étant fournie par l'intégrale de Dirichlet (n° 75), il vient, en effet,

$$\sigma_m = \frac{1}{m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\,\frac{\sum\limits_{0}^{m-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}\,d\alpha\,;$$

et, en utilisant la formule de sommation suivante :

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sum_{0}^{m-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha = \sum_{0}^{m-1}\frac{\cos k\alpha - \cos(k+1)\alpha}{2} = \frac{1-\cos m\alpha}{2},$$

on trouve l'*intégrale de Fejér* :

$$(5) \qquad \sigma_m = \frac{1}{m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\,\frac{1-\cos m\alpha}{\left(2\sin\frac{1}{2}\alpha\right)^2}\,d\alpha.$$

Si l'on remplace $(1-\cos m\alpha)$ par $2\sin^2 m\frac{\alpha}{2}$ et la variable d'intégration α par 2α, cette intégrale se ramène à la forme

$$(6) \qquad \sigma_m = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}[f(x+2\alpha)+f(x-2\alpha)]\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

L'*intégrale de Fejér* présente sur celle de Dirichlet un avantage précieux : le facteur qui multiple f est essentiellement positif, ce qui autorise l'usage du théorème de la moyenne. Nous allons immédiatement nous en servir.

95. Théorème obtenu par l'application du théorème de la moyenne à l'intégrale de Fejér. — *Si l'on désigne par L et l les bornes supérieure et inférieure de f supposée bornée, toutes les sommes σ_m de Fejér sont intermédiaires entre l et L.*

En effet, le théorème de la moyenne s'appliquant à l'intégrale de Fejér, σ_m est comprise entre

$$\frac{2l}{m\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{2L}{m\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 d\alpha,$$

c'est-à-dire entre l et L, car, pour $m \geqslant 1$, on a nécessairement

$$(7) \qquad \frac{2}{m\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = 1,$$

l'intégrale de Fejér se réduisant à cela quand f se réduit à 1.

M. Fejér a déduit de là un résultat très élégant :

Si $f(x)$ est bornée comme ci-dessus par les deux nombres l et L et si les modules des produits ma_m et mb_m de ses constantes de Fourier par leur indice ne surpassent pas deux nombres fixes A et B quel que soit m, alors une somme S_m quelconque de la série de Fourier est comprise entre

$$l-(A+B) \qquad \text{et} \qquad L+(A+B).$$

En effet, l'équation (1) du n° 92 peut s'écrire

$$\sigma_n - S_{n-1} = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} ku_k.$$

Dans notre hypothèse, on a

$$|ku_k| = |k(a_k \cos kx + b_k \sin kx)| \leq A + B.$$

Par conséquent, $\sigma_n - S_{n-1}$ est compris entre $\pm(A+B)$. D'ailleurs σ_n étant compris entre l et L, on obtient ainsi le théorème énoncé.

REMARQUE. — Le théorème précédent est toujours applicable aux fonctions qui sont à variation bornée dans tout l'intervalle d'amplitude 2π. En effet, *ma_m et mb_m sont essentiellement bornés quand la fonction est à variation bornée.* Il suffit de le prouver pour une fonction non décroissante. On a, dans ce cas, par le deuxième théorème de la moyenne,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{f(-\pi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\xi} + \frac{f(\pi)}{\pi}\int_{\xi}^{\pi} \cos mx\,dx,$$

donc

$$a_m = \frac{f(-\pi)-f(\pi)}{\pi}\,\frac{\sin m\xi}{m},$$

et une formule analogue pour b_m, ce qui prouve la proposition.

APPLICATION. — On a, entre 0 et 2π (n° 87),

$$\frac{\pi - x}{2} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots$$

Dans ce cas-ci, $l = -\frac{\pi}{2}$, $L = +\frac{\pi}{2}$, $A = 0$, $B = 1$; donc, quel que soit n, la somme

$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \dots + \frac{\sin nx}{n}$$

est comprise entre $\pm\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$.

96. Condition de convergence du procédé de M. Fejér. — Supposons $f(x)$ absolument intégrable. Cherchons la condition pour que σ_m tende vers une limite déterminée S. A cet effet, soustrayons de l'équation (6) l'équation (7) du n° précédent multipliée par S. En posant, comme précédemment,

$$(8) \qquad \varphi(\alpha) = f(x + 2\alpha) + f(x - 2\alpha) - 2S,$$

il vient

$$\sigma_m - S = \frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 d\alpha.$$

La condition pour que σ_m tende (uniformément) vers S est que cette intégrale tende (uniformément) vers 0. D'ailleurs, quelque petit que soit ε positif, on peut, de proche en proche, remplacer dans cette condition l'intégrale précédente par les deux suivantes :

$$\frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha, \qquad \frac{1}{m\pi}\int_0^{\varepsilon} \varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha,$$

car les différences de chacune de ces intégrales à la suivante s'expriment par les intégrales

$$\frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\sin^2 m\alpha\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) d\alpha, \qquad \frac{1}{m\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha,$$

qui sont respectivement de modules moindres que

$$\frac{1}{m\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(\alpha)| \left|\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right| d\alpha, \qquad \frac{1}{m\pi\varepsilon^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(\alpha)|\, d\alpha,$$

et tendent, par conséquent, uniformément vers 0 quand m tend vers l'infini. De là, la règle suivante :

RÈGLE. — *Si $f(x)$ est absolument intégrable, la condition nécessaire et suffisante pour que σ_m tende (uniformément) vers S est que, à tout nombre positif ω, on puisse faire correspondre deux nombres ε et M (indépendants de x) tels que l'intégrale*

$$\frac{1}{m\pi}\int_0^\varepsilon \varphi(\alpha)\left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha$$

soit de module $< \omega$ pour tout entier $m >$ M.

Cette condition est évidemment réalisée si $\varphi(\alpha)$ tend vers 0 avec α, car alors on peut prendre ε assez petit pour que $|\varphi(\alpha)|$ soit $< \omega$ tant que α est $< \varepsilon$, auquel cas l'intégrale précédente est de module moindre que

$$\frac{\omega}{m\pi}\int_0^\varepsilon \left(\frac{\sin m\alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha < \frac{\omega}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 d\alpha = \frac{\omega}{2},$$

cette dernière intégrale ayant été calculée au n° 24.

C'est ce qui arrive : 1° en tout point de continuité, en faisant $S = f(x)$; 2° en tout point de discontinuité de première espèce, en faisant $2S = f(x+0) + f(x-0)$. De plus, la convergence sera uniforme dans tout intervalle intérieur à un intervalle de continuité. De là, le théorème suivant :

97. Théorème de Fejér. — *Le procédé de la moyenne arithmétique permet de sommer la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ absolument intégrable en tout point de continuité de $f(x)$ ou en tout point de discontinuité de première espèce. La somme ainsi attribuée à la série sera*

$$f(x) \quad \text{ou} \quad \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

suivant le cas.

COROLLAIRE I. — Si la série de Fourier converge en un point de continuité ou de discontinuité de première espèce, elle doit donc nécessairement converger vers les valeurs indiquées dans le théorème précédent. C'est un cas particulier du théorème établi au n° 91.

Corollaire II. — Si les produits ma_m et mb_m sont bornés, le produit mu_m où u_m est le terme général de la série de Fourier est borné aussi. On peut appliquer le théorème de Hardy-Landau. Donc

Si les produits ma_m et mb_m sont bornés, la série de Fourier converge vers $f(x)$ en tout point de continuité et vers $\frac{1}{2}[(fx-0)+f(x+0)]$ en tout point de discontinuité de première espèce.

C'est ce qui a lieu pour les fonctions à variation bornée dans tout intervalle, d'après la remarque du n° 95. Nous retrouvons ainsi, dans un cas particulier, le critère de M. C. Jordan (n° 84).

§ 5. Singularités des séries de Fourier

98. Singularités des séries de Fourier de fonctions continues. — Une série de Fourier peut présenter deux genres de singularités qui méritent de fixer l'attention. D'abord elle peut diverger sans que la fonction cesse d'être continue. C'est la singularité de P. du Bois-Reymond, qui l'a signalée en 1876. Ensuite elle peut représenter une fonction continue sans converger uniformément dans un intervalle de continuité. C'est la singularité de M. Lebesgue, qui l'a signalée en 1905.

M. Fejér a indiqué, pour former ces singularités, des procédés systématiques. Celui que nous allons exposer est imité des siens.

99. Remarques préliminaires. — Posons

$$\varphi(n, x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}\right).$$

Nous savons (n° 95) que cette fonction ne peut surpasser en valeur absolue une constante fixe A quels que soient n et x.

Soit maintenant m un entier $> n$; les deux fonctions :

$$\varphi(n, x) \sin mx, \qquad -\varphi(n, x) \cos mx,$$

admettent la même borne absolue A. Leurs développements

de Fourier, écrits dans l'ordre naturel des termes, sont respectivement les sommes limitées de cosinus et de sinus ci-dessous :

$$(1)\qquad \sum_{r=n}^{1}\frac{\cos(m-r)x}{r} - \sum_{r=1}^{n}\frac{\cos(m+r)x}{r}$$

$$(2)\qquad \sum_{r=n}^{1}\frac{\sin(m-r)x}{r} - \sum_{r=1}^{n}\frac{\sin(m+r)x}{r}.$$

Ce sont les propriétés des sommes partielles de ces deux développements qui vont nous servir. Nous appelons d'ailleurs *somme partielle* d'un développement de Fourier (dont les termes sont rangés dans l'ordre naturel) la somme d'un groupe quelconque de termes *consécutifs* de ce développement.

Première propriété. — *Quand x varie de $2k\pi+\varepsilon$ à $2k\pi+(2\pi-\varepsilon)$, on peut assigner aux sommes partielles des développements* (1) *et* (2) *une borne absolue* L(ε), *qui ne dépend que de* ε.

Il suffit évidemment de prouver cela pour les sommes des deux types suivants (dont les sommes partielles en question ne sont que des combinaisons linéaires très simples) :

$$\sum_{r=1}^{s}\frac{\cos(m+r)x}{r},\qquad \sum_{r=1}^{s}\frac{\sin(m+r)x}{r}\qquad (s=1, 2, 3\ldots).$$

car le changement de signe de r revient à ceux de m et de x.

Le module de chacune de ces sommes est moindre que celui de l'expression obtenue en ajoutant à la première somme la seconde multipliée par i (ou $\sqrt{-1}$), à savoir

$$e^{mix}\sum_{r=1}^{s}\frac{e^{rix}}{r}.$$

Mais, comme le facteur $1:r$ est positif et décroissant, cette expression admet, en vertu du théorème d'Abel, la même borne absolue que l'ensemble des expressions :

$$\sum_{1}^{s} e^{rix} = \frac{e^{ix}(e^{six}-1)}{e^{ix}-1} = \frac{e^{\frac{ix}{2}}(e^{six}-1)}{2i\sin\frac{x}{2}},$$

où $s = 1, 2 \ldots$ Ces expressions sont de modules $< 1 : \left|\sin\frac{x}{2}\right|$ et ont, par conséquent, pour borne $1 : \sin\frac{\varepsilon}{2}$.

Deuxième propriété. — Si x tend vers $2k\pi$, la propriété précédente disparaît et l'on voit apparaître, dans les développements (1) et (2) respectivement, le germe des singularités de du Bois-Reymond et de Lebesgue.

En effet, pour $x = 2k\pi$, le développement (1) contient une somme partielle, infiniment grande avec n, à savoir

$$\sum_1^n \frac{1}{r} > \int_1^{n+1} \frac{dr}{r} > \operatorname{Log} n.$$

Pour $x = (\pi : 2m) + 2k\pi$, le développement (2) contient aussi une somme partielle, infiniment grande avec n, à savoir (m étant $> n$)

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{m-r}{m}\frac{\pi}{2}\right)}{r} > \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\frac{m-r}{m}\right)}{r} = \sum_1^n \frac{1}{r} - \frac{n}{m} > \operatorname{Log} n - 1.$$

100. Construction des singularités. — Soit maintenant $a_1 + a_2 + \cdots$ une série illimitée convergente à termes positifs. Considérons deux suites de nombres entiers croissants b_n, $c_n (b_n < c_n)$, définis par leurs indices $n = 1, 2, \ldots$ Formons les deux séries :

(I) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(b_n, x) \sin(c_n x) = \Phi(x),$$

(II) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(b_n, x) \cos(c_n x) = \Psi(x).$$

Ces deux séries sont absolument et uniformément convergentes, car leurs termes sont de modules moindres que les termes correspondants de la série à termes positifs $A\Sigma a_n$. Donc les deux séries ont pour sommes des fonctions de x *toujours continues*.

Faisons croître b_n assez rapidement pour que le produit $a_n \operatorname{Log} b_n$ croisse à l'infini avec n. Alors, par la deuxième propriété ci-dessus, le développement de Fourier du terme général de (I) renferme une somme partielle infiniment grande avec n pour $x = 2k\pi$; celui du terme général de la série (II)

une somme partielle infiniment grande avec n dans le voisinage de $x = 2k\pi$.

Faisons croître c_n avec n, assez vite pour que les développements de Fourier de deux termes consécutifs de la série (I) ou de la série (II) ne renferment pas de termes semblables et ne puissent pas se réduire entre eux. Il suffit pour cela de faire (*)

$$c_n > c_{n-1} + b_{n-1} + b_n.$$

Alors les séries de Fourier des fonctions Φ et Ψ s'obtiennent en écrivant tout simplement à la suite les uns des autres les développements de Fourier des termes consécutifs des séries (I) et (II). Les sommes partielles relatives aux termes généraux de ces deux séries sont aussi, dans ce cas, des sommes partielles des développements de Fourier des fonctions Φ et Ψ.

Donc *la série de Fourier de* Φ *est divergente pour* $x = 2k\pi$; *celle de* Ψ *ne peut converger uniformément dans le voisinage de* $x = 2k\pi$.

Par contre, quelque petit que soit ε, ces deux séries de Fourier convergent uniformément vers les fonctions Φ et Ψ dans l'intervalle de $2k\pi + \varepsilon$ à $2k\pi + (2\pi - \varepsilon)$. Démontrons-le seulement pour la première, le raisonnement étant le même pour les deux. La somme S_m des premiers termes de la série de Fourier de Φ se compose d'une certaine somme s_{n-1} des premiers termes de la série (I), plus une somme partielle du développement de Fourier du terme suivant de (I); ce terme est

$$a_n \varphi(b_n, x) \sin (c_n x).$$

Donc cette dernière somme partielle, de module moindre que $a_n L(\varepsilon)$ par la première propriété qui précède, tend uniformément vers 0 quand n (ou m) tend vers l'infini. Elle est sans influence sur la convergence, de sorte que la série de Fourier de Φ converge de la même façon que la série (I).

Les séries de Fourier de Φ et Ψ ne peuvent donc cesser de converger que pour les valeurs $2k\pi$. Nous avons vu tantôt

(*) On réalisera, par exemple, toutes ces conditions par le choix :

$$a_n = \frac{1}{2^n}, \quad b_n = 2^{n^3}, \quad c_n = 2^{(n+1)^3}.$$

que celle de Φ diverge : *elle présente donc, aux points $x=2k\pi$, la singularité de P. du Bois-Reymond.* Celle de Ψ, au contraire, converge pour $x = 2k\pi$ puisque tous ses termes sont nuls ; mais nous avons vu tout à l'heure qu'elle ne peut converger *uniformément* autour de ces points : *elle présente donc aux points $x = 2k\pi$ la singularité de Lebesgue.*

Les deux séries de Fourier de Φ et de Ψ sont respectivement des séries de cosinus seuls et de sinus seuls, mais *elles ont les mêmes coefficients.* On dit que les deux séries sont *conjuguées.* Les fonctions Φ et Ψ fournissent donc un exemple de deux séries de Fourier conjuguées présentant l'une la singularité de P. du Bois-Reymond, l'autre celle de M. Lebesgue. C'est M. Fejér qui a construit le premier exemple réalisant ces conditions.

101. Remarque. — Si l'on modifie les définitions des fonctions Φ et Ψ en remplaçant x par nx dans le terme général des séries (I) et (II), les fonctions Φ et Ψ ne cessent pas d'être continues. La série de Fourier de Φ devient divergente pour toute valeur de x commensurable à π, mais nous ne savons plus comment elle se comporte pour les autres ; la série de Fourier de Ψ ne peut plus converger uniformément dans aucun intervalle, mais nous ne sommes plus assurés qu'elle converge.

§ 6. Séries trigonométriques quelconques Unicité du développement

102. Théorème de Cantor. — *Lorsqu'une série trigonométrique*

$$(1) \qquad \Sigma a_m \cos mx + b_m \sin mx$$

est convergente dans un intervalle, ses coefficients tendent vers zéro quand m tend vers l'infini.

En posant

$$a_m = \rho_m \cos \lambda_m, \qquad b_m = \rho_m \sin \lambda_m,$$

la série prend la forme

$$(2) \qquad \Sigma \rho_m \cos (x - \lambda_m)$$

et si ρ_m tend vers 0, a_m et b_m tendent aussi vers 0. Nous supposerons donc que, dans cette série (2), il y ait une infinité de ρ_m supérieurs à un nombre $k > 0$ et nous allons montrer que tout intervalle δ contient un point de divergence.

Soit p un nombre quelconque donné ; montrons d'abord que tout intervalle d'amplitude δ en contient un autre δ' où un terme au moins d'indice $> p$ de la série (2) sera de module $> k : 2$.

En effet, un terme dans lequel ρ_m est $> k$, satisfera à cette condition à la condition de prendre $m > p$ et $m > \pi : \delta$, car alors l'intervalle δ contient au moins un point x' où $\cos m(x' - \lambda_m) = 1$ et, par conséquent, au moins un intervalle δ' où ce même cosinus est de module $> \frac{1}{2}$.

Parcourons maintenant les termes successifs de la série (2). Il y a un premier terme satisfaisant à la condition d'avoir son module $> k : 2$ dans un intervalle contenu dans δ, soit δ' cet intervalle (où le premier à gauche en cas d'ambiguité) ; il y a un premier terme après celui-ci dont le module surpasse $k : 2$ dans un intervalle contenu dans δ' ; soit δ'' cet intervalle, et ainsi de suite. La suite illimitée d'intervalles emboîtés $\delta, \delta', \delta'', \ldots$ admet au moins un point commun. En ce point, une infinité de termes de la série (2) sont de modules $> k : 2$ et la série est divergente.

103. Dérivée seconde généralisée. — Soit $f(x)$ une fonction de x. Nous poserons, pour simplifier l'écriture, cette différence seconde Δ^2 ayant cependant ici une définition particulière,

$$\Delta^2 f(x) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x).$$

La *dérivée seconde généralisée* de $f(x)$ est la limite pour $h = 0$, quand elle existe, du quotient

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Cette limite est égale à la dérivée seconde ordinaire en tout point x où cette dernière existe. En effet, la dérivée première

existe alors aux environs de x et l'on a, par la formule de Cauchy (t. I, n° 66),

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} = \frac{f'(x+\theta h) - f'(x-\theta h)}{2\theta h} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Ce rapport tend la dérivée vers $f''(x)$, supposée existante, quand h tend vers 0.

104. Théorème de Schwarz. — *Une fonction dont la dérivée seconde généralisée est constamment nulle dans un intervalle (a, b), est une fonction linéaire dans cet intervalle.*

Observons d'abord que, pour h suffisamment petit, $\Delta^2 f(x)$ est ≤ 0 en tout point où $f(x)$ est maximée, et ≥ 0 en tout point où cette fonction est minimée.

Donc une fonction ne peut pas avoir de maximum dans un intervalle où sa dérivée seconde généralisée est partout positive (et non nulle), ni de minimum si la dérivée est négative (et non nulle).

Soit $f(x)$ une fonction continue dont la dérivée seconde généralisée est nulle dans tout l'intervalle (a, b) ; on peut déterminer une fonction linéaire $px + q$ prenant les mêmes valeurs que $f(x)$ aux deux limites de l'intervalle. Alors, quel que soit ε positif, la fonction

$$f(x) - (px + q) + \varepsilon(x - a)(b - x),$$

qui s'annule aux deux limites a et b, ne sera pas négative dans l'intervalle, sinon elle aurait un minimum (ce qui est impossible car la dérivée seconde généralisée, -2ε, est négative). Pour une raison analogue, la fonction

$$f(x) - (px + q) - \varepsilon(x - a)(b - x)$$

ne peut être positive. On a donc, dans (a, b),

$$-\varepsilon(x - a)(b - x) \leq f(x) - (px + q) \leq \varepsilon(x - a)(b - x) ;$$

et, en faisant tendre ε vers 0, il vient (C. Q. F. D.)

$$f(x) = px + q.$$

Ce théorème peut être généralisé de la manière suivante :

Soit $f(x)$ une fonction ayant une dérivée seconde généra-

lisée nulle, sauf en un nombre limité de points, dans un intervalle (a, b) *; si, en chacun de ces points singuliers, la fonction est continue et que l'on ait*

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta^2 f(x)}{h} = 0,$$

la fonction $f(x)$ *se réduit encore à une fonction linéaire dans tout l'intervalle.*

En effet, d'après le théorème de Schwarz, la courbe $y = f(x)$ se réduit à une ligne polygonale continue, dont les sommets correspondent aux points singuliers. Soit x l'abscisse de l'un d'eux, la condition

$$0 = \lim \frac{\Delta^2 f(x)}{h} = \lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}$$

exprime que les deux cotés aboutissant à ce même sommet ont la même direction. Ils sont donc dans le prolongement l'un de l'autre et la ligne polygonale se réduit à une seule droite.

Corollaires. — Le théorème de Schwarz fixe le degré d'indétermination d'une fonction dont la dérivée seconde généralisée est donnée : *Deux fonctions qui ont la même dérivée seconde généralisée (finie) ne peuvent différer que par une fonction linéaire.*

Plus généralement, *deux fonctions qui ont la même dérivée seconde généralisée (finie), sauf en un nombre limité de points singuliers, ne diffèrent que par une fonction linéaire, pourvu qu'elles soient continues et qu'elles satisfassent toutes deux à la condition* $\lim \Delta^2 f : h = 0$.

Supposons maintenant qu'une fonction continue $F(x)$ ait une dérivée seconde généralisée $f(x)$ sauf peut être pour un nombre limité de points de l'intervalle (a, b), que $f(x)$ n'ait qu'un nombre limité de points de discontinuité et soit intégrable (absolument ou non), enfin que $F(x)$ satisfasse à la condition $\lim \Delta^2 F : h = 0$. Alors on aura

$$F(x) = \int_a^x dx \int_a^x f(x)\, dx + px + q.$$

En effet, F et l'intégrale double ont la même dérivée seconde généralisée sauf aux points singuliers, et les deux fonctions

satisfont à la condition $\lim \Delta^2 F : h = 0$, la première par hypothèse et la seconde, parce qu'elle a une dérivée unique en chaque point.

105. Méthode de Riemann pour sommer les séries trigonométriques. Premier théorème de Riemann. — Considérons la série trigonométrique *quelconque*, c'est-à-dire que ses coefficients peuvent n'être pas ceux de Fourier,

$$(1) \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

ou, si, pour abréger, nous posons

$$A_0 = \frac{1}{2} a_0, \qquad A_m = a_m \cos mx + b_m \sin mx,$$

la série

$$(1^{\text{bis}}) \qquad A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_m + \cdots$$

Supposons que a_m et b_m soient bornés, ce qui a toujours lieu si la série converge dans un intervalle (n° 102). Formons la série nouvelle

$$(2) \qquad F(x) = A_0 \frac{x^2}{2} - A_1 - \frac{A_2}{2^2} - \cdots - \frac{A_m}{m^2} - \cdots,$$

que l'on déduit de la première en intégrant deux fois chaque terme. Cette série sera uniformément convergente dans tout intervalle, car, A_m ne pouvant surpasser en valeur absolue un nombre positif A, les termes de la série précédente sont inférieurs en valeur absolue aux termes correspondants de la série positive convergente $A\Sigma m^{-2}$. Donc la série (2) a pour somme une fonction $F(x)$ continue pour toutes les valeurs de x.

La méthode de sommation de Riemann consiste à attribuer comme somme à la série (1) la dérivée seconde généralisée de $F(x)$ quand elle existe, c'est-à-dire la limite pour $\alpha = 0$ du rapport

$$\frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2} = \frac{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)}{4\alpha^2}.$$

Cette méthode comprend comme cas particulier la méthode de sommation ordinaire, ainsi qu'il résulte du théorème suivant :

Théorème. — *Si la série trigonométrique sommée par le*

procédé ordinaire admet les limites d'indétermination $s-l$ et $s+l$, les limites d'indétermination du rapport $\Delta^2 F : 4\alpha^2$ quand α tend vers zéro, seront comprises entre $s-kl$ et $s+kl$, où k est une constante numérique que l'on peut assigner une fois pour toutes.

Si l'on tient compte des relations

$$\cos n(x+2\alpha)+\cos n(x-2\alpha)-2\cos nx=-4\cos nx\sin^2 n\alpha,$$
$$\sin n(x+2\alpha)+\sin n(x-2\alpha)-2\sin nx=-4\sin nx\sin^2 n\alpha,$$

il vient facilement

$$(3)\qquad \frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2}=A_0+A_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2+\cdots+A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2+\cdots$$

Soit s_n la somme des n premiers termes de la série (1) ; en substituant s_1 à A_0 et $s_{n+1}-s_n$ à A_n, l'expression devient

$$s_1+(s_2-s_1)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}s_n\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right];$$

ou encore, en introduisant des termes s qui se détruisent,

$$\frac{\Delta^2 F}{4\alpha^2}=s+\sum_{n=1}^{\infty}(s_n-s)\left[\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right].$$

Il reste à montrer que les limites d'indétermination de la somme ajoutée ici à s sont comprises entre $-kl$ et $+kl$. Mais on peut, pour cela, faire abstraction d'un nombre de termes aussi grand qu'on veut au début, car tous ces termes tendent vers 0. On peut donc raisonner comme si toutes les différences s_n-s étaient, à un infiniment petit près, comprises entre $-l$ et $+l$. Les limites d'indétermination de la somme ajoutée à s sont donc de module inférieur à

$$l\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{(n-1)\alpha}^{n\alpha}d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right|<l\sum\int_{(n-1)\alpha}^{n\alpha}\left|d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right|=kl,$$

où k est la constante purement numérique

$$k=\int_0^{\infty}\left|d\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\right|$$

et cette intégrale existe, parce que son élément est infiniment petit d'ordre 2 pour $\alpha=\infty$.

Si $l=0$, on obtient comme cas particulier le théorème fondamental suivant, qui est dû à Riemann : *Si la série trigono-*

métrique converge en un point x, le quotient $\Delta^2 F : 4\alpha^2$ converge vers la même limite quand α tend vers 0 ; autrement dit, le procédé de sommation de Riemann conduit au même résultat que le procédé ordinaire. On suppose a_n et b_n bornés.

106. Deuxième théorème de Riemann. — *Quand les coefficients a_n et b_n tendent vers 0 pour $n = \infty$, le quotient*

$$\frac{\Delta^2 F}{2\alpha} = \frac{F(x+2\alpha) - F(x)}{2\alpha} - \frac{F(x-2\alpha) - F(x)}{-2\alpha}$$

tend vers 0 avec α quel que soit x.

En effet, ce quotient est le produit de la série (3) par 2α. Quelque petit que soit ε positif, le produit par 2α de la somme des termes en nombre limité où $|A_m| > \varepsilon$ tend vers 0 avec α. On majore donc la valeur absolue de la limite en remplaçant tous les A par ε, ce qui donne l'expression

$$2\alpha\left[\varepsilon + \varepsilon\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)^2 + \cdots + \varepsilon\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 + \cdots\right]$$

Soit p un nombre fixe ; la somme des termes où $n\alpha \leqslant p$ a pour limite, par définition, l'intégrale définie

$$2\varepsilon\int_0^p\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

et elle est aussi petite que l'on veut avec ε. La somme des termes restants est inférieure à

$$2\varepsilon\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\alpha}{(p+\lambda\alpha)^2} < 2\varepsilon\sum_{\lambda=0}^{\infty}\left|\frac{1}{p+(\lambda-1)\alpha} - \frac{1}{p+\lambda\alpha}\right| = \frac{2\varepsilon}{p-\alpha};$$

elle est également infiniment petite avec ε. Donc la majorante obtenue est infiniment petite avec ε et la limite considérée ne peut être que 0.

107. Théorème d'unicité. — *Si une fonction $f(x)$, périodique de période 2π, n'admettant qu'un nombre limité de points de discontinuité dans la période et intégrable (absolument ou non), admet un développement en série trigonométrique qui*

converge vers $f(x)$, sauf peut-être encore pour un nombre limité de points singuliers, alors cette série est celle (propre ou impropre) de Fourier.

Supposons que $f(x)$ admette le développement

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

La série étant convergente, les coefficients a_n et b_n tendent vers 0. On peut donc employer la méthode de sommation de Riemann et tout d'abord former la fonction $F(x)$. Celle-ci aura pour dérivée seconde généralisée la fonction $f(x)$, sauf pour un nombre limité de points. Mais, en ces points exceptionnels, la condition $\lim \Delta^2 F : h = 0$ sera réalisée, en vertu du second théorème de Riemann que nous venons d'établir (h étant égal à 2α). On a donc, ainsi que nous l'avons déduit du théorème de Schwarz (n° 104),

$$F(x) = \int_a^x dx \int_a^x f(x)\,dx + px + q\,;$$

par suite, on a partout

$$F'(x) = \int_a^x f(x)\,dx + p$$

et, sauf aux points exceptionnels,

$$F''(x) = f(x).$$

Faisons encore $h = 2\alpha$, on vérifie facilement l'identité

$$\Delta^2 F(x) = \int_0^{2\alpha} [F'(x+t) - F'(x-t)]\,dt = \int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{t} f(x+u)\,du.$$

Nous connaissons le développement de $\Delta^2 F(x)$ en série de Fourier uniformément convergente, à savoir

$$\Delta^2 F(x) = 4 \sum_0^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2.$$

On a donc, par la loi de formation des coefficients,

$$4\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2 a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^2 F(x) \cos nx\,dx.$$

Supposons d'abord que $f(x)$ soit bornée. Remplaçons $\Delta^2 F(x)$ par sa valeur précédente sous forme d'intégrale double. On peut intervertir les intégrations et l'on a

$$4\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2 a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{t} du \int_0^{2\pi} f(x+u)\cos nx\,dx.$$

Soient α_n et β_n les constantes de Fourier de $f(x)$; on a, $f(x)$ étant périodique,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+u)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos n\,(x-u)\,dx$$
$$= \alpha_n \cos nu + \beta_n \sin nu.$$

Portant cette valeur dans la formule précédente, on observe que l'intégrale de sin nu est nulle entre $-t$ et t ; et il vient

$$4\left(\frac{\sin n\alpha}{n}\right)^2 a_n = \alpha_n \int_0^{2\alpha} \frac{2\sin nt}{n}\,dt = 4\,\frac{1-\cos 2n\alpha}{2n^2}\,\alpha_n.$$

Donc $a_n = \alpha_n$; de même $b_n = \beta_n$. Le développement trigonométrique est celui de Fourier.

Supposons, en second lieu, que $f(x)$ ne soit pas bornée. Enfermons les points de discontinuité de $f(x)$ dans des intervalles d'amplitude ε et désignons par $f(x, \varepsilon)$ une fonction égale à f sauf dans ces intervalles où elle sera nulle. Donnons à ε une suite de valeurs tendant vers 0 ; les deux intégrales

$$\int_{-t}^{t} f(x+u, \varepsilon)\,du \qquad \int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{t} f(x+u, \varepsilon)\,du$$

convergent *uniformément* quel que soit x vers leurs limites respectives

$$\int_{-t}^{t} f(x+u)\,du, \qquad \int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{t} f(x+u)\,du,$$

car elles n'en diffèrent que par des *intégrales singulières* (existantes par hypothèse) dont la définition est indépendante de x.

Ainsi l'on a, successivement,

$$\Delta^2 F(x) = \lim_{\varepsilon = 0} \int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{t} f(x+u, \varepsilon)\,du$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Delta^2 F(x)\cos nx\,dx = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx \int_0^{2\alpha} dt \int_{-t}^{t} f(x+u, \varepsilon)\,du.$$

Maintenant la fonction f est bornée sous les signes d'intégration et on peut intervertir et effectuer les intégrations comme dans le cas précédent. Il vient, de la même façon,

$$\lim\left(\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\right)^2 a_n = \lim\left(\frac{\sin n\varepsilon}{n\varepsilon}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{2\pi} f(x, \varepsilon) \cos nx \, dx,$$

et, par conséquent, par définition des intégrales généralisées,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Donc a_n et, de même, b_n sont les constantes de Fourier de $f(x)$. Toutefois, si $f(x)$ n'est pas absolument intégrable, la série de Fourier est impropre.

Corollaire. — *Une même fonction ne peut admettre deux développements trigonométriques différents qui convergeraient vers la fonction sauf pour un nombre limité de points dans la période* 2π. (Heine-Cantor.)

Ce théorème est la conséquence du précédent. En effet, la différence de deux tels développements serait un développement trigonométrique de 0 satisfaisant aux conditions du théorème précédent, ce serait donc le développement de 0 en série de Fourier. Tous les coefficients seraient nuls. Donc les deux séries dont on a fait la différence seraient identiques.

Les théorèmes précédents sont susceptibles de généralisations très importantes. Mais ces généralisations supposent une extension de la notion d'intégrale définie qui est due à M. Lebesgue et que nous réservons d'exposer éventuellement dans un autre volume.

CHAPITRE V

Généralités sur les équations différentielles Existence et propriétés des intégrales

§ 1. Formation des équations différentielles

108. Définitions. Ordre d'une équation. — On appelle *équation différentielle* une relation qui renferme à la fois les variables et leurs différentielles (ou leurs dérivées). Celles qui ne renferment qu'une seule variable indépendante et les dérivées des variables dépendantes sont des *équations différentielles ordinaires*. Ce sont les seules dont nous nous occuperons pour le moment.

Dans le cas le plus simple, l'équation ne contient que la variable indépendante x, une fonction inconnue y de x et sa dérivée première y'; elle est alors du *premier ordre* ou de la forme

$$f(x, y, y') = 0.$$

En général, *une équation différentielle de l'ordre n* contient la variable indépendante x, une fonction y de x et ses dérivées jusqu'à l'ordre n inclus.

Les relations entre les seules variables qui résultent des équations différentielles sont les *intégrales* ou les *solutions* de ces équations.

La génération des équations différentielles peut se concevoir d'une manière qui permet de prévoir la nature de leurs intégrales.

109. Formation d'équations du premier ordre. — Soit une équation

(1) $$F(x, y, C) = 0$$

entre deux variables x, y est une constante arbitraire C. En la dérivant, on a

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Généralement cette équation renferme encore C ; mais si l'on peut éliminer C entre (1) et (2), on obtient une relation

$$(3) \qquad f(x, y, y') = 0,$$

au moins aussi générale, mais qui a lieu entre x, y et y' seuls quel que soit C. C'est une équation différentielle. Elle exprime, par exemple, une propriété géométrique commune à toutes les courbes représentées par l'équation (1), C restant quelconque.

L'équation (1) qui renferme une constante arbitraire, s'appelle l'*intégrale générale* de l'équation (3). On voit ainsi que l'intégration d'une équation du premier ordre a pour effet d'introduire une constante arbitraire. La généralité de ce résultat sera établie dans le paragraphe suivant.

Exemple. — Soit l'*équation des coniques homofocales*

$$\frac{x^2}{a+C} + \frac{y^2}{b+C} = 1.$$

On en tire

$$\frac{x}{a+C} + \frac{yy'}{b+C} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{x}{a+C} = \frac{-yy'}{b+C} = \frac{x+yy'}{a-b}$$

et, en portant dans la première équation ces valeurs de $x:(a+C)$ et $y:(b+C)$, on obtient l'équation différentielle de ces coniques

$$y'^2 + \frac{x^2-y^2-a+b}{xy} y' - 1 = 0.$$

110. Formation d'équations du deuxième ordre. — Considérons maintenant une équation avec deux constantes arbitraires

$$(4) \qquad F(x, y, C_1, C_2) = 0.$$

Si l'on dérive une première fois, on obtient

$$(5) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0.$$

Généralement, il est impossible d'éliminer C_1 et C_2 entre (4) et (5), auquel cas il n'existe aucune relation sans constante arbitraire entre x, y et y'. On dit alors que les deux constantes sont *distinctes*, et pour les éliminer, il faut dériver une fois de plus, ce qui introduit y''. L'élimination des constantes conduira donc à une équation différentielle du second ordre.

Pour former cette équation, on peut aussi faire l'élimination de proche en proche. On élimine d'abord une des constantes, C_2 par exemple, entre (4) et (5), ce qui suppose que (5) renferme encore les deux constantes sinon l'élimination serait toute faite. On a de la sorte une relation

$$(6) \qquad f_1(x, y, y', C_1) = 0,$$

qui renferme encore une constante arbitraire.

Maintenant on peut éliminer C_1 entre (6) et sa dérivée, ce qui fournit l'équation cherchée.

$$(7) \qquad f_2(x, y, y', y'') = 0.$$

Celle-ci, qui ne renferme plus de constante arbitraire, a au moins la même généralité que les précédentes.

La relation (7) est la seule relation indépendante des constantes arbitraires (supposées distinctes) qui puisse exister entre x, y, y' et y'', car, s'il en existait une autre, en éliminant y'' entre elles deux, on trouverait une relation sans constante entre x, y et y', ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'équation (7) est une équation différentielle du second ordre ; l'équation (6) est du premier ordre, mais contient une constante arbitraire : c'est une *intégrale première* de l'équation (7). Enfin l'équation (4) qui contient deux constantes arbitraires est son *intégrale générale*.

On prévoit d'après cela que l'intégration d'une équation du second ordre doit introduire deux constantes arbitraires, ce qui sera démontré rigoureusement dans le paragraphe suivant.

111. Formation d'équations d'ordre quelconque. — Ces résultats se généralisent aisément. Soit une équation avec n constantes

$$(8) \qquad F(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0.$$

Si l'on dérive $n - 1$ fois de suite, on forme $(n - 1)$ équations nouvelles et l'on a en tout n équations entre les n constantes et $x, y, y', \ldots y^{(n-1)}$. On dit que les constantes sont *distinctes* si l'élimination des n constantes entre ces n équations est impossible, ou s'il n'existe pas de relation sans constante arbitraire entre $x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$. Mais, si l'on dérive une fois de plus, on a $(n + 1)$ équations entre lesquelles on peut éliminer les n constantes, ce qui conduit à une relation entre $x, y, y', \ldots y^{(n)}$.

Pour former cette relation, on peut d'ailleurs faire l'élimination de proche en proche. En éliminant C_n entre $F = 0$ et sa dérivée, on trouve

$$f_1(x, y, y', C_1, C_2, \ldots C_{n-1}) = 0.$$

De même, en éliminant C_{n-1} entre $f_1 = 0$ et sa dérivée, on a

$$f_2(x, y, y', y'', C_1, C_2, \ldots C_{n-2}) = 0.$$

Après n opérations analogues, on obtiendra

$$(9) \qquad f_n(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0.$$

Cette relation est la seule qui puisse exister entre $x, y, y, \ldots, y^{(n)}$ sans constante arbitraire, car s'il y en avait deux distinctes, on en déduirait une autre entre $x, y, \ldots y^{(n-1)}$ seulement et les constantes ne seraient pas distinctes.

L'équation (9) est une équation différentielle de l'ordre n. Les équations successives $f_{n-1} = 0, f_{n-2} = 0, \ldots f_1 = 0$, qui renferment chaque fois une dérivée de moins et une constante arbitraire de plus, sont des *intégrales première, seconde,... $(n-1)^{me}$* de l'équation (9). Enfin l'équation $F = 0$, qui a lieu entre x et y seuls et renferme n constantes arbitraires, est son *intégrale générale*.

On conçoit donc que l'intégration d'une équation de l'ordre n aura généralement pour effet d'introduire n constantes arbitraires, ce qui sera démontré rigoureusement dans le paragraphe suivant.

Exemples. — 1° *L'équation générale des cercles*

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

contient trois constantes arbitraires. L'équation différentielle des cercles sera donc du 3ᵉ ordre. Pour l'obtenir, dérivons d'abord deux fois de suite, il vient

$$1 + y'^2 + yy'' - by'' = 0.$$

Divisons par y'' et dérivons une dernière fois, il vient

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''}\right)' + y' = 0, \quad \text{d'où} \quad 3y'y''^2 = (1 + y'^2)\,y'''.$$

2° *L'équation générale des coniques* étant

$$y = ax + b + \sqrt{px^2 + 2qx + r},$$

leur équation différentielle a été obtenue par Halphen comme il suit : En dérivant deux fois, il vient

$$y' = a + \frac{px + q}{\sqrt{px^2 + 2qx + r}}, \qquad y'' = \frac{pr - q^2}{(px^2 + 2qx + r)^{\frac{3}{2}}}$$

d'où

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = \frac{px^2 + 2qx + r}{(pr - q^2)^{\frac{2}{3}}}, \qquad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

Dans le cas de la parabole, $p = 0$; l'équation se réduit au 4ᵉ ordre,

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = 0.$$

Si l'on effectue les dérivations indiquées et qu'on chasse les dénominateurs, on trouve, pour l'équation différentielle des coniques,

$$40\,y'''^3 - 45\,y''\,y'''\,y^{IV} + 9\,y''^2\,y^{V} = 0;$$

et, pour celle des paraboles,

$$5\,y'''^2 - 3\,y''\,y^{IV} = 0.$$

§ 2. Existence de l'intégrale d'une équation du premier ordre

112. Considérations préliminaires. — Soit une équation du 1ᵉʳ ordre

$$y' = f(x, y).$$

Intégrer cette équation, c'est trouver toutes les fonctions y

de x qui la vérifient. Au point de vue géométrique, c'est trouver toutes les courbes dont la tangente possède, au point de contact (x, y), la direction déterminée par cette équation.

La première question qui se pose est de savoir si le problème admet des solutions et combien il en admet. L'interprétation géométrique fait prévoir la réponse.

En effet, imaginons qu'une *courbe intégrale*, c'est-à-dire satisfaisant à l'équation $y' = f(x, y)$, soit décrite par un point mobile. Dans chacune de ses positions successives, ce point marche dans une direction imposée par cette équation. On conçoit aisément que son mouvement sera déterminé de proche en proche, mais le point de départ reste arbitraire. Il existera donc une infinité de courbes répondant à la question, chacune d'elles étant déterminée par un de ses points considéré comme *initial*. Par conséquent, il existera aussi une infinité d'intégrales ou de fonctions y satisfaisant à l'équation. Une intégrale sera déterminée par sa valeur initiale y_0 pour $x = x_0$, mais cette valeur reste arbitraire.

Les considérations précédentes sont dépourvues de valeur démonstrative, mais elles font nettement saisir la nature du problème. Elles facilitent l'intelligence des démonstrations rigoureuses qui suivent et qui vont mettre en lumière les conditions sous lesquelles ces conclusions sont exactes.

113. Existence et unicité de l'intégrale d'une équation du premier ordre. — L'existence et l'unicité de l'intégrale d'une équation différentielle ne peuvent se démontrer que moyennant certaines conditions. Nous allons introduire celle de Lipschitz.

Condition de Lipschitz. — Soit $f(x, y)$ une fonction continue dans un domaine D. Pour éviter toute obscurité, nous supposerons que ce domaine est limité par un contour *convexe*. Nous dirons que la fonction $f(x, y)$ satisfait à la *condition de Lipschitz relativement à* y dans le domaine D, si l'on peut assigner une constante positive M telle que l'on ait, quels que soient les deux points (x, Y) et (x, y) de même abscisse dans ce domaine,

$$| f(x, Y) - f(x, y) | < M \, | Y - y |.$$

La condition de Lipschitz sera réalisée, en particulier, si $f(x, y)$ admet une dérivée partielle f'_y bornée dans le domaine D, car elle résulte alors de la formule des accroissements finis : M sera la borne supérieure du module de cette dérivée.

Théorème d'existence et d'unicité. — *Soit une équation différentielle de la forme normale (c'est-à-dire résolue par rapport à y')*

(1) $$y' = f(x, y).$$

Si la fonction $f(x, y)$ est continue et satisfait à la condition de Lipschitz relativement à y dans le domaine convexe D, et que l'on désigne par (x_0, y_0) un point intérieur du domaine, l'équation (1) *admet, dans ce domaine, une intégrale $y = F(x)$ prenant la valeur initiale y_0 pour $x = x_0$ et cette intégrale est unique.*

Ce théorème fondamental est la conséquence des trois suivants, qui se démontrent sous ces mêmes conditions.

114. Théorème I. — *Considérons deux courbes tracées dans le domaine* D *et passant par le point (x_0, y_0). Soient y et* Y *les ordonnées, fonctions continues de x, de ces deux courbes ; si ces deux fonctions ont des dérivées bornées et intégrables et satisfont à l'équation* (1), *sauf des erreurs respectives ω et ω_1 dont la somme des modules est $< \varepsilon$, on a, dans l'intérieur du domaine* D,

$$|Y - y| < \frac{\varepsilon}{M}(e^{M|x - x_0|} - 1).$$

En effet, on a, par hypothèse,

(2) $$\begin{cases} y' = f(x, y) + \omega, \\ Y' = f(x, Y) + \omega_1, \end{cases} \qquad |\omega| + |\omega_1| < \varepsilon ;$$

et, par la condition de Lipschitz,

$$|f(x, Y) - f(x, y)| < M\,|Y - y|.$$

Il vient donc, en soustrayant membre à membre les équations (2),

(3) $$|Y' - y'| < M\,|Y - y| + \varepsilon.$$

Supposons d'abord que $Y - y$ ne change pas de signe ou

n'en change qu'un nombre limité de fois entre x_0 et x. Posons

$$u = |\,Y - y\,|,$$

de sorte que l'on a, le signe ambigu ne changeant qu'un nombre limité de fois,

$$u = \pm (Y - y), \qquad u' = \pm (Y' - y');$$

il vient *a fortiori*, par (3), $u' < \text{M}u + \varepsilon$, d'où

$$\text{D}_x e^{-\text{M}x} u = e^{-\text{M}x} (u' - \text{M}u) < \varepsilon e^{-\text{M}x}.$$

Les deux membres sont bornés et intégrables, car cette dérivée n'est discontinue (avec u') qu'en un nombre limité de points où $Y - y$ change de signe. Intégrons de x_0 à x (supposé $> x_0$) et observons que $u_0 = 0$; il vient

$$e^{-\text{M}x} u < \frac{\varepsilon}{\text{M}} (e^{-\text{M}x_0} - e^{-\text{M}x}),$$

d'où, l'inégalité à démontrer

$$u < \frac{\varepsilon}{\text{M}} (e^{\text{M}x - \text{M}x_0} - 1).$$

Si x était $< x_0$, on intégrerait de x à x_0, ce qui permuterait x et x_0, et le théorème serait encore établi.

Si les deux courbes sont des lignes polygonales, comme on le supposera dans le théorème suivant, elles ne peuvent se couper qu'en un nombre limité de points, et $Y - y$ ne peut changer de signe qu'un nombre limité de fois. Le cas général (dans lequel $Y - y$ peut changer de signe et u' être discontinu une infinité de fois) se ramène à celui-là. Si l'on remplace les deux courbes par des polygones inscrits dont les côtés tendent vers 0, on commet une erreur infiniment petite sur chacun des deux membres des équations (2) ; le théorème s'applique aux deux polygones sauf une majoration infiniment petite de ε ; il s'applique donc, à la limite, aux deux courbes.

115. Théorème II. — *Quelque petit que soit ε positif, on peut tracer dans le domaine* D *une ligne continue $y = \varphi(x)$, passant par le point (x_0, y_0), telle que $\varphi(x)$ ait une dérivée intégrable et vérifie l'équation différentielle sauf une erreur ω de module $< \varepsilon$. Si ε tend 0, $\varphi(x)$ tend uniformément vers une intégrale* F(x) *de l'équation* (1) *ayant la valeur initiale y_0.*

En effet, partageons le domaine D en éléments rectangulaires α suffisamment petits pour que l'oscillation de $f(x, y)$ soit $< \varepsilon$ dans chacun d'eux. Partant alors du point (x_0, y_0) avec le coefficient angulaire $f(x_0, y_0)$, décrivons une ligne polygonale dont la direction ne change qu'à la rencontre des frontières des éléments α, la nouvelle direction étant fixée à chaque rencontre d'une nouvelle frontière par la valeur de $f(x, y)$ au point de rencontre. Le polygone ainsi tracé, qui a ses sommets sur les frontières des rectangles α, a une ordonnée $y = \varphi(x)$ satisfaisant aux conditions proposées.

Donnons maintenant à ε une suite de valeurs tendant vers 0 ; les fonctions φ correspondantes se rapprochent indéfiniment les unes des autres, en vertu de la proposition I, et tendent, par conséquent, uniformément vers une limite $F(x)$. Or on a, par hypothèse, pour chaque fonction φ,

$$\varphi' = f(x, \varphi) + \omega, \qquad |\omega| < \varepsilon ;$$

d'où, en intégrant de x_0 à x,

$$\varphi - y_0 = \int_{x_0}^{x} [f(x, \varphi) + \omega]\, dx ;$$

et, à la limite, ε tendant vers zéro,

$$F(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, F)\, dx.$$

Cette formule montre que $F(x)$ est une fonction continue de valeur initiale y_0 et, en la dérivant, que $F(x)$ est une intégrale.

116. Théorème III. — *L'intégrale* $F(x)$ *de valeur initiale* y_0 *est unique dans le domaine* D. *Toute fonction* y, *de même valeur initiale, qui vérifie l'équation* (1) *avec une erreur de module* $< \varepsilon$, *diffère aussi peu que l'on veut de* $F(x)$ *sous la condition de supposer* ε *assez petit ; d'une manière plus précise, on a, dans le domaine* D,

$$|y - F(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\left(e^{M|x - x_0|} - 1\right).$$

Cette formule s'obtient comme cas particulier de la proposition I, car l'intégrale $F(x)$ vérifie l'équation (1) avec une

erreur nulle. Il résulte évidemment de là que l'intégrale de valeur initiale y_0 est unique.

117. Calcul approché de l'intégrale. — Les théorèmes II et III qui précèdent fournissent un procédé pour le calcul approché de l'intégrale ayant la valeur initiale y_0.

Le théorème III permet d'assigner une valeur de ε qui assure le degré d'approximation désiré. Après cela, le théorème II donne le moyen de construire un polygone pour lequel ce degré d'approximation est obtenu.

Il y a lieu d'observer que l'on applique ici le théorème III sans connaître F(x). Pour pouvoir utiliser l'inégalité du théorème III, il faudra s'assurer que l'intégrale inconnue $y = F(x)$ ne sorte pas du domaine D. On devra donc restreindre en conséquence l'intervalle dans lequel on fera varier x. Il est facile d'assigner *a priori* des bornes à la courbe intégrale, puisque l'on sait que son coefficient angulaire est compris entre $\pm$ M.

§ 3. Propriétés diverses de l'intégrale d'une équation du premier ordre

118. L'intégrale considérée comme fonction de sa valeur initiale. — Considérons encore l'équation différentielle

$$(1) \qquad y' = f(x, y),$$

où $f(x, y)$ est une fonction continue dans le domaine D.

Nous savons que, si cette fonction est *lipchitzienne* dans le domaine D, l'équation (1) admet une intégrale unique de valeur initiale y_0 pour $x = x_0$. Si on fait varier y_0 alors que x_0 reste fixe, cette intégrale est fonction de y_0; écrivons-la sous la forme

$$(2) \qquad y = F(x, y_0).$$

Les théorèmes suivants vont faire connaître sous quelles conditions cette intégrale $F(x, y_0)$ sera une fonction continue ou dérivable de y_0.

119. Théorème I. — *Si $f(x, y)$ est continue dans le domaine D et lipschitzienne en y avec la constante de Lipchitz M, l'intégrale y est fonction continue de y_0 et les accroissements correspondants Δy et Δy_0 satisfont à la relation*

$$|\Delta y| < |\Delta y_0| e^{M|x-x_0|}.$$

Remarquons que $y + \Delta y - \Delta y_0$ est une fonction de même valeur initiale y_0 que l'intégrale y, qu'elle vérifie l'équation

$$(y + \Delta y - \Delta y_0)' = (y + \Delta y)' = f(x, y + \Delta y)$$

et satisfait, par conséquent à l'équation (1) sauf l'erreur

$$|f(x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y - \Delta y_0)| \leqq M |\Delta y_0|.$$

La différence des deux fonctions, à savoir

$$(y + \Delta y - \Delta y_0) - y = \Delta y - \Delta y_0,$$

doit donc satisfaire, en vertu du théorème III du n° 116, à l'inégalité

$$|\Delta y - \Delta y_0| \leqq |\Delta y_0| (e^{M|x-x_0|} - 1).$$

Si $|\Delta y|$ est $\leqq |\Delta y_0|$, le théorème est vérifié. Supposons donc $|\Delta y| > |\Delta y_0|$, auquel cas

$$|\Delta y - \Delta y_0| \geqq |\Delta y| - |\Delta y_0|,$$

il vient *a fortiori*

$$|\Delta y| - |\Delta y_0| \leqq |\Delta y_0| (e^{M|x-x_0|} - 1)$$

ce qui se réduit à la formule de l'énoncé.

120. Théorème II. — *Si la fonction continue $f(x, y)$ admet, en outre, une dérivée partielle f'_y continue dans le domaine D, l'intégrale $y = F(x, y_0)$ admet, dans le même domaine, une dérivée partielle par rapport à y_0; celle-ci est fonction continue des deux variables x, y_0 et elle ne peut pas s'annuler dans le domaine D.*

Considérons les deux intégrales $y = F(x)$ et $y + \Delta y$, ayant respectivement les valeurs initiales infiniment voisines y_0 et $y_0 + \Delta y_0$. Elles vérifient toutes deux l'équation (1). Soustrayons ces deux résultats membre à membre et divisons encore par Δy_0 ; il vient

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta y_0}\right)' = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y_0}.$$

Mais $\Delta y : \Delta y_0$ étant borné, en vertu de la proposition précédente, le second membre est infiniment voisin de

$$f'_y(x, F)\,\frac{\Delta y}{\Delta y_0}.$$

Par conséquent $\Delta y : \Delta y_0$, qui a pour valeur initale 1, est infiniment voisin de l'intégrale de l'équation

$$u' = uf'_y(x, F)$$

qui a la même valeur initiale, car cette équation entre x et u satisfait à toutes les conditions admises pour l'équation (1). Cette intégrale u est la limite de $\Delta y : \Delta y_0$ donc égale à $F'_{y_0}(x, y_0)$. Il est facile d'intégrer cette équation en u ; divisant par u, on en tire, puisque $u_0 = 1$,

$$D \log u = f'_y(x, F), \qquad \log u = \int_{x_0}^{x} f'_y(x, F)\,dx.$$

Il vient ainsi

$$u = F'_{y_0}(x, y) = e^{\int_{x_0}^{x} f'_y(x, F)\,dx}$$

ce qui met en évidence que cette dérivée est, en même temps que F et $f'_y(x, F)$, une fonction continue de x, y_0 et que cette fonction ne peut jamais s'annuler.

121. Théorème III. — *Sous les conditions du théorème précédent, c'est-à-dire si $f(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ sont des fonctions continues dans le domaine* D, *l'intégrale*

$$y = F(x, y_0)$$

peut être résolue par rapport à y_0 et la fonction

$$y_0 = \Phi(x, y)$$

sera une fonction différentiable des deux variables x, y dans le domaine D.

En effet, en vertu du théorème précédent, $F(x, y_0)$ est une fonction différentiable dont la dérivée F'_{y_0} ne s'annule pas. Cela suffit pour entraîner l'existence et la différentiabilité de la fonction implicite y_0 (t. I, n° 121, remarque finale).

§ 4. Existence des intégrales d'un système d'équations différentielles

Les résultats obtenus pour une seule équation dans les deux paragraphes précédents peuvent être étendus à un système d'équations différentielles simultanées. A cet effet, il faut tout d'abord généraliser la condition de Lipschitz.

122. Condition de Lipschitz. — Soit $f(t, x_1, x_2, \dots x_n)$ ou, en abrégé, $f(t, x)$ une fonction continue de $n + 1$ variables t, x dans un domaine D. Nous supposerons ce domaine convexe, c'est-à-dire qu'une droite de l'hyperespace ne pourra couper sa frontière qu'en deux points. Nous dirons que la fonction $f(t, x)$ vérifie la *condition de Lipschitz relativement aux variables* x dans le domaine D, si l'on peut assigner une constante positive M (constante de Lipschitz) tel que l'on ait, quels que soient les deux points $(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, X_1, \dots X_n)$, de même t, dans le domaine D, la somme Σ s'étendant aux indices $i = 1, 2, \dots n$,

$$| f(t, X_1, \dots X_n) - f(t, x_1, \dots x_n) | < M\Sigma | X_i - x_i | .$$

Cette condition sera réalisée, en particulier, si les dérivées, partielles de f par rapport aux x sont bornées dans le domaine D, auquel cas leurs modules admettront une borne supérieure commune M, qui sera la constante de Lipschitz correspondante.

123. Théorème d'existence et d'unicité. — Considérons maintenant un système de n équations différentielles simultanées entre n fonctions inconnues $x_1, x_2, \dots x_n$ de la variable indépendante t. Ce système est de la *forme normale* s'il est résolu par rapport aux n dérivées inconnues, c'est-à-dire s'il est de la forme

$$(1) \qquad x'_i = f_i(t, x) \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Voici, quel est, dans ce cas, le théorème d'existence et d'unicité :

THÉORÈME. — *Si les fonctions f_i sont continues dans le*

domaine convexe D, *si elles satisfont à la condition de Lipschitz relativement aux variables* x *et que l'on désigne par* $(t_0, x_{10}, \ldots x_{n0})$ *un point intérieur au domaine, le système* (2) *admet, dans ce domaine* D, *un système d'intégrales*

$$x_1 = F_1(t), \ldots \qquad x_n = F_n(t),$$

se réduisant respectivement à $x_{10}, \ldots x_{n0}$ *pour* $t = t_0$ *et ce système est unique.*

La démonstration se fait en généralisant, sous ces conditions, les trois théorèmes du paragraphe 2.

124. Théorème I. — *Considérons, dans le domaine* D, *deux courbes passant par le point initial* (t_0, x_0). *Soient respectivement :* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *et* $X_1, X_2, \ldots X_n$ *les valeurs (fonctions de* t*) des* n *variables* x *sur ces deux courbes. Si chacune des fonctions* x_i *et* X_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ *admet une dérivée bornée et intégrable et satisfait à l'équation* (2), *sauf les erreurs respectives* ω_i *et* Ω_i, *la somme des modules de toutes les erreurs* ω_i *et* Ω_i *ne dépassant pas* ε, *on aura, dans le domaine* D.

$$\sum_{i=1}^{n} |X_i - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{M}(e^{M|t-t_0|} - 1),$$

où M *est la somme des constantes de Lipschitz,* M_i, *relatives à toutes les fonctions* f_i.

On a, par hypothèse,

$$x_i' = f_i(t, x) + \omega_i, \qquad X_i' = f_i(t, X) + \Omega_i\,;$$

d'où, par soustraction membre à membre,

$$\begin{aligned} |X_i' - x_i'| &\leq |f_i(t, X) - f_i(t, x)| + |\Omega_i - \omega_i| \\ &\leq M_i \Sigma |X_i - x_i| + |\Omega_i - \omega_i| \end{aligned}$$

et, en additionnant pour tous les indices,

$$\Sigma |X_i' - x_i'| \leq M \Sigma |X_i - x_i| + \varepsilon.$$

Posons

$$u = \Sigma |X_i - x_i|,$$

d'où

$$u' = \Sigma [\pm (X_i' - x_i')] \leq \Sigma |X_i' - x_i'|$$

il vient *a fortiori*

$$u' \leq Mu + \varepsilon.$$

Cette inégalité est semblable à celle qui a été obtenue au § 2 et la démonstration s'achève de la même manière, en substituant, au besoin, des polygones inscrits aux courbes.

125. Théorème II. — *Quelque petit que soit* ε *positif, on peut tracer dans le domaine* D *une ligne continue,* $x_i = \varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, *passant par le point* (t_0, x_0), *telle que les* φ_i *aient leur dérivée intégrable et vérifient le système* (1) *avec des erreurs absolues dont la somme est* $< \varepsilon$. *Si* ε *tend vers* 0, *les* φ_i *tendent vers des intégrales* $F^i(x)$ *de valeur initiale* x_{i_0}.

La démonstration faite au § 2 se généralise d'elle-même. On peut construire dans l'hyperespace une ligne polygonale qui répond à la question. On partage le domaine D en domaines élémentaires α assez petits pour que la somme des oscillations des fonctions $f_i(t, x)$ soit $< \varepsilon$ dans chacun d'eux. Cela fait, on trace, en partant du point initial avec la direction imposée en ce point, une ligne polygonale dont la direction change au passage d'un élément α dans un autre, chaque côté ayant la direction imposée au passage de la frontière. Cette ligne vérifie le système différentiel au degré d'approximation ε. Si l'on fait tendre ε vers 0, cette ligne tend vers une courbe intégrale, comme dans le cas de deux dimensions. Comme dans ce cas encore, on obtient la proposition suivante :

126. Théorème III. — *Le système des intégrales* $F(t)$ *de valeurs initiales* x_{i_0} *est unique dans le domaine* D. *Tout système de fonctions* x_i *ayant les mêmes valeurs initiales qui satisfait approximativement aux équations, diffère aussi peu qu'on veut du système intégral, pourvu que les erreurs soient assez petites. D'une manière plus précise, si la somme des erreurs absolues commises sur chaque équation est* $< \varepsilon$, *on a, dans le domaine* D,

$$\Sigma \mid x_i - F_i(t) \mid < \frac{\varepsilon}{M} (e^{M \mid t - t_0 \mid} - 1).$$

Ces propositions fournissent une méthode pour le calcul approché des intégrales dont on donne les valeurs initiales x_{i_0} pour $t = t_0$.

§ 5. Propriétés des intégrales d'un système d'équations différentielles

127. Le système intégral considéré comme dépendant des valeurs initiales. — Le système intégral des équations (1) du paragraphe précédent dépend des valeurs initiales $x_{10}, \dots x_{n0}$ pour $t = t_0$. Ecrivons-le sous la forme

$$x_i = F_i(t, x_{10}, \dots x_{n0}) \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Nous pouvons énoncer les théorèmes suivants :

128. Théorème I. — *Si les fonctions $f(t, x)$ du système différentiel sont continues et, en outre, lipschitziennes par rapport aux x, les intégrales x_i sont des fonctions continues des valeurs initiales x_{i0}. Si l'on donne, à l'une en particulier x_{i_0} des valeurs initiales, un accroissement Δx_{i_0}, les accroissements Δx_k qui en résultent pour les fonctions x_k ($k = 1, 2 \dots n$) satisfont à la condition*

$$\sum_k |\Delta x_k| \leq |\Delta x_{i_0}| e^{M|t-t_0|},$$

où M désigne, comme précédemment, la somme des constantes de Lipschitz relatives aux fonctions $f(t, x)$.

Donnons aux valeurs initiales x_{i0} un système d'accroissements Δx_{i0} et soit Δx_i le système d'accroissements des fonctions x_i. Le système de fonctions $(x_i + \Delta x_i - \Delta x_{i0})$ (de valeurs initiales x_{i0}) vérifie le système différentiel, sauf des erreurs de la forme

$$|f(t, x + \Delta x - \Delta x_0) - f(t, x + \Delta x)|,$$

dont la somme est inférieure à $M \sum_i |\Delta x_{i0}|$. Or la différence de ces deux intégrales de même valeur initiale, est

$$(x_i + \Delta x_i - \Delta x_{i0}) - x_i = \Delta x_i - \Delta x_{i0};$$

il vient donc, par la proposition III du n° 126,

$$\sum_i |\Delta x_i - \Delta x_{i0}| \leq \sum_i |\Delta x_{i0}| (e^{M|t-t_0|} - 1).$$

Annulons les accroissements des valeurs initiales sauf un seul, Δx_{i0}, dans cette relation ; puis ajoutons le même terme $|\Delta x_{i0}|$ aux deux membres. La relation peut alors s'écrire comme il suit :

$$\sum^{k} |\Delta x_k| - |\Delta x_i| + |\Delta x_i - \Delta x_{i0}| + |\Delta x_{i0}| < |\Delta x_{i0}| e^{M|t-t_0|}.$$

Mais la somme

$$|\Delta x_i - \Delta x_{i0}| - |\Delta x_i| + |\Delta x_{i0}|$$

est nulle si $|\Delta x_i|$ est $> |\Delta x_{i0}|$, et positive si $|\Delta x_i| < |\Delta x_{i0}|$.

On peut donc supprimer cette somme de la relation précédente, qui subiste alors *a fortiori*, ce qui prouve le théorème.

129. Théorème II. — *Si les fonctions continues $f(t, x)$ admettent, en outre, par rapport aux x, des dérivées partielles continues dans le domaine D, les intégrales $F(t, x_0)$ admettent des dérivées partielles par rapport aux x_0, et celles-ci sont fonctions continues des variables t, x_0.*

Considérons les deux systèmes d'intégrales x et $x + \Delta x$, le premier de valeurs initiales x_0, le second ayant les mêmes valeurs initiales sauf une seule x_{i0}, qui est remplacée par $x_{i0} + \Delta x_{i0}$. Ces deux systèmes vérifient les équations différentielles et, en soustrayant membre à membre les équations correspondantes, il vient

$$(\Delta x_k)' = f_k(t, x + \Delta x) - f_k(t, x) \qquad (k = 1, 1, \ldots n).$$

Divisons par Δx_{i0} et faisons tendre cet accroissement vers 0 ; les quotients $\Delta x : \Delta x_{i0}$ sont bornés, en vertu du théoréme précédent, et les fonctions f_k sont différentiables en x ; on a donc, sauf une erreur infiniment petite sur les seconds membres,

$$\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta x_{i0}}\right)' = \sum_{1} \frac{\partial f_k}{\partial x_l} \frac{\Delta x_l}{\Delta x_{i0}} \quad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Donc, par la proposition III du n° 126, les quotients $\Delta x_k : \Delta x_{i0}$ ont pour limites les dérivées, bien déterminées,

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_{i0}} = u_{ki}.$$

qui sont les intégrales de mêmes valeurs initiales du système d'équations linéaires

$$u'_{ki} = \sum_{l} \frac{\partial f_k}{\partial x_l} u_{li} \qquad (l = 1, 2, \ldots n) ;$$

et ces valeurs initiales sont toutes nulles, sauf celle de u_{ll} qui est égale à 1.

Ces dérivées u_{kl} existent donc, mais elles sont, de plus, fonctions continues des x_{l0}. En effet, si l'on altère infiniment peu ces valeurs initiales, on altère infiniment peu les x_i et, par conséquent, aussi les coefficients $\frac{\partial f_k}{\partial x_l}$ des équations linéaires qui précèdent. Les anciennes valeurs des u_{kl} satisfont donc aux nouvelles équations linéaires sauf une erreur infiniment petite, donc elles sont infiniment voisines des nouvelles intégrales u_{ki}, les valeurs initiales, 0 ou 1, étant les mêmes.

130. Théorème III. — *Sous les mêmes conditions, le jacobien*

$$J = \frac{d(x_1, x_2, \dots x_n)}{d(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots x_{n_0})}$$

ne s'annulera pas dans le domaine D.

En représentant, comme ci-dessus, par u_{ki} les éléments de ce déterminant, on a

$$J = \begin{vmatrix} u_{12} & u_{21} & \dots \\ u_{21} & u_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{k_1} & u_{k_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \qquad J' = \sum_k \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots \\ u_{11} & u_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ u'_{k_1} & u'_{k_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Si l'on remplace $u'_{k_1}, u'_{k_2}, \dots$ par leurs valeurs données par le système linéaire ci-dessus (n° 129), ce dernier déterminant se réduit à $J \frac{\partial f_k}{\partial x_k}$, car les coefficients des autres dérivées $\frac{\partial f_k}{\partial x_k}$ sont nuls comme déterminants à deux lignes égales. Il vient donc

$$J' = J \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_k}.$$

La valeur initiale de J est 1 ; il vient enfin, en intégrant cette équation,

$$J = e^{\int_{t_0}^{t} dt \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_k}}$$

on voit donc que J ne peut pas s'annuler.

131. Théorème IV. — *Sous les mêmes conditions, le système intégral,*

$$x_i = F_i(t, x_{k_0}), \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

peut être résolu par rapport aux valeurs initiales x_{k_0} et mis sous la forme

$$x_{k_0} = \Phi_k(t, x_i) \qquad (k = 1, 2, \dots n).$$

De plus, les fonctions $\Phi_k(t, x_i)$ sont différentiables relativement aux variables t, x_i.

En effet, les F_i sont différentiables et leur jacobien J ne s'annule pas. Cela suffit pour entraîner l'existence et la différentiabilité des fonctions implicites x_{k_0} (t. I, n° 122).

132. Théorème V. — *Si, en plus des conditions antérieures, les fonctions $f(t, x)$ ont leurs dérivées partielles par rapport aux x continues jusqu'à l'ordre n, les intégrales $F(t, x)$ admettront, par rapport aux valeurs initiales x_0, des dérivées partielles continues jusqu'au même ordre n.*

Ce théorème se réduit au théorème II pour $n = 1$. Pour l'établir en général, supposons le démontré pour $n - 1$ et montrons qu'il subsiste pour n. A cet effet, considérons le système

$$u'_{ki} = \sum_l \frac{\partial f_k}{\partial x_l} u_{li} \qquad (l = 1, 2, \dots n),$$

qui a pour solutions les dérivées premières des x_k par rapport à x_{i0} ; il satisfait aux conditions du théorème V à démontrer jusqu'à l'ordre $n - 1$. Mais le théorème est admis pour cet ordre, donc les dérivées des dérivées premières des x_k sont continues jusqu'à l'ordre $n - 1$. Donc le théorème V subsiste pour n.

133. Cas où les équations différentielles dépendent de divers paramètres. — Plus généralement, supposons que les équations différentielles dépendent d'un certain nombre de paramètres $\alpha, \beta, \dots$ Les équations (1) sont alors de la forme

$$(1) \qquad x'_k = f_k(t, x, \alpha, \beta, \dots) \qquad (k = 1, 2, \dots n).$$

Le système intégral dépendra des mêmes paramètres et des valeurs initiales, et sera de la forme

$$(2) \qquad x_k = F_k(t, x_0, \alpha, \beta, \dots) \qquad (k = 1, 2, \dots n).$$

L'analyse précédente s'étend au cas où l'on fait varier simultanément les valeurs initiales et les paramètres.

1° *Les solutions x_k seront des fonctions continues des valeurs initiales et des paramètres dans tout domaine où les fonctions $f(t, x, \alpha, \ldots)$ sont continues par rapport aux variables et aux paramètres et, de plus, lipschitziennes par rapport aux x_k.*

En effet, une variation infiniment petite des valeurs initiales et des paramètres entraîne une variation infiniment petite des seconds membres des équations (1) ; donc les anciennes intégrales sont infiniment voisines des nouvelles.

2° *Si les dérivées premières des fonctions $f(t, x, \alpha, \ldots)$ par rapport à l'un des paramètres sont, en outre, continues, les solutions x_k auront, par rapport à α, des dérivées premières continues $u_k = \dfrac{\partial x_k}{\partial \alpha}$. Celles-ci seront les solutions u du système*

$$(3) \qquad u'_k = \sum_l \frac{\partial f_k}{\partial x_l} u_l + \frac{\partial f_k}{\partial \alpha} \qquad (l = 1, 2, \ldots n),$$

dont les valeurs initiales sont nulles.

Ceci suppose toutefois que les valeurs initiales des x_k ne dépendent pas de α. Le théorème subsiste si ces valeurs sont des fonctions de α dont la dérivée est continue. Mais alors la valeur initiale de u_k est $\dfrac{\partial x_{k0}}{\partial \alpha}$.

Ces conclusions s'obtiennent par les mêmes raisonnements que le théorème II du n° 129. Il y a ici un terme en plus dans l'équation (3), parce que α entre explicitement dans f_k, tandis que les valeurs initiales n'y entrent qu'implicitement par les x_k.

3° *Si les dérivées des fonctiods $f(t, x, \alpha, \ldots)$ par rapport aux variables x et aux paramètres, existent et sont continues jusqu'à l'ordre n, les solutions x_k admettront, par rapport aux valeurs initiales x_0 et aux paramètres, des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n.*

Ce théorème se réduit au précédent pour $n = 1$. On l'étend de l'ordre $n - 1$ à n, en observant, comme dans la démonstra-

tion du théorème V qui précède, que ce théorème s'applique au système (3) pour l'ordre $n - 1$, ce qui est effectivement le cas.

§ 9. Classification des intégrales
Intégrales générale, particulières, singulières

134. Une seule équation du premier ordre. — Considérons d'abord l'équation différentielle unique, du premier ordre,

$$y' = f(x, y).$$

Nous avons vu, moyennant certaines conditions, que cette équation admet une solution y dont la valeur initiale y_0 pour $x = x_0$ est arbitraire. La solution doit donc dépendre d'une constante arbitraire C (qui peut être, en particulier, y_0). On appelle *intégrale générale* de l'équation, une solution y qui dépend d'une constante arbitraire C, ou une équation définissant y et contenant C. Mais il faut que la constante C permette d'attribuer à y une valeur arbitraire y_0 pour $x = x_0$. Toute intégrale qu'on déduit de l'intégrale générale par une détermination spéciale de la constante, est une *intégrale particulière*.

Dans tout domaine où se vérifient les conditions de continuité du théorème d'existence (n° 113), en particulier si f et f'_y sont continues, *l'intégrale générale donne la solution complète du problème de l'intégration*, car il ne passe qu'une seule intégrale par chaque point (x_0, y_0), c'est donc l'intégrale particulière passant par ce point.

Mais, dans un domaine où les conditions de continuité n'ont plus lieu et à supposer que l'intégrale définie plus haut subsiste, l'équation peut admettre exceptionnellement des intégrales ne rentrant pas dans l'intégrale générale. On donne à celles-là le nom d'*intégrales singulières*.

115. Système d'équation. — Soit un système de *n équations différentielles simultanées* entre une variable indépendante t et n fonctions $x_1, x_2, \ldots x_n$ de t,

$$x'_i = f_i(i, x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Comme on peut se donner arbitrairement les valeurs initiales des fonctions x pour $t = t_0$, la solution doit dépendre de n constantes arbitraires. On donne le nom d'*intégrale générale* à une solution, c'est-à-dire un système de n fonctions x (ou de relations servant à les définir), qui dépend de n constantes arbitraires *distinctes*, et l'on entend par ce mot que les constantes arbitraires permettent d'attribuer aux x des valeurs arbitraires pour $t = t_0$.

Les intégrales qui sont comprises dans l'intégrale générale par une détermination spéciale des constantes sont des *intégrales particulières*.

L'intégrale générale fournit la solution complète du problème de l'intégration dans tout domaine où les solutions du théorème fondamental d'unicité sont vérifiées. Mais, dans un domaine où ces conditions viennent à manquer, des *intégrales singulières* non comprises dans l'intégrale générale deviennent possibles.

136. Équation d'ordre n. — Soit enfin *une équation unique de l'ordre n*,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}),$$

résolue par rapport à la plus haute dérivée. Elle se ramène à un système du premier ordre en désignant par $p_1, p_2, \dots p_{n-1}$ les $(n - 1)$ premières dérivées de y, considérées comme autant d'inconnues.

Ce système sera

$$\begin{aligned} y' &= p_1, \\ p_i' &= p_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots n-2) \\ p_{n-1}' &= f(x, y, p_1, p_2, \dots p_{n-1}). \end{aligned}$$

On peut donc se donner arbitrairement y et ses $n - 1$ premières dérivées pour $x = x_0$. L'*intégrale générale* est une solution qui dépend de n constantes arbitraires *distinctes*, c'est-à-dire permettant de donner à y et à ses $n - 1$ premières dérivées des valeurs initiales arbitraires pour $x = x_0$. Le nombre des constantes arbitraires est donc égal à l'ordre de l'équation. En fixant leurs valeurs, on obtient des *intégrales particulières*.

L'intégrale générale fournit la solution complète du problème de l'intégration dans tout domaine où les conditions du théorème fondamental d'unicité ont lieu (en particulier, dans tout domaine où f et ses dérivées par rapport à $y, y, \ldots y_{n-1}$ sont continues). Si ces conditions viennent à manquer, des *intégrales singulières* non comprises dans la générale deviennent possibles.

L'étude des intégrales singulières ne peut se faire d'une manière satisfaisante qu'en se plaçant au point de vue des fonctions analytiques. Nous ne nous en occuperons pas ici.

CHAPITRE VI

Intégration des équations du premier ordre

§ 1. Équation résolues par rapport à y'

137. Intégrabilité. — On dit communément qu'*on sait intégrer* une équation quand son intégration se ramène à des quadratures. En ce sens, il n'y a qu'un petit nombre d'équations que l'on sache intégrer. Nous allons examiner les principales. Nous commencerons par celles qui sont du premier degré par rapport à la dérivée de la fonction inconnue. Nous supposerons que cette fonction soit y ; mais il est clair qu'on pourrait aussi bien considérer x comme fonction inconnue de y et c'est ce que l'on doit souvent faire, en pratique, pour être ramené à l'un des types que nous allons examiner. Il doit être entendu, une fois pour toutes, que les équations satisfont aux conditions de continuité et de dérivabilité qui assurent l'existence de l'intégrale et la légitimité des calculs auxquels nous les soumettons.

138. Équations différentielles exactes (ou immédiatement intégrables). — Si l'équation est du premier degré en $dy : dx$, on peut la mettre sous la forme

$$(1) \qquad P\,dx + Q\,dy = 0,$$

où P et Q sont des fonctions données de x, y. On dit que l'équation est *immédiatement intégrable* si son premier membre est une différentielle totale exacte. La condition nécessaire et suffisante pour cela est que l'on ait $P'_y = Q'_x$, ces dérivées étant supposées continues (n° 29). Si elle a lieu, le premier membre est la différentielle totale d'une fonction $F(x, y)$;

l'équation revient à $dF = 0$; son intégrale sera donc $F =$ const., ou, en développant (n° 27),

$$\int_a^x P(x, y)\, dx + \int Q(a, y)\, dy = C.$$

C'est l'intégrale générale et il n'y a pas de solution singulière.

Exemples. — Les intégrales sont en regard des équations.

Équations	Intégrales
$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$	$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$
$\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0$	$\dfrac{y}{x} = \cot(C - \sqrt{1 + x^2 + y^2})$
$\dfrac{dx}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\dfrac{dy}{y} = 0$	$y^2 = C^2 - 2Cx.$

139. Séparation des variables. — L'équation (1) est immédiatement intégrable si les *variables sont séparées*, c'est-à-dire si P est une fonction X de x seul et Q est une fonction Y de y seul, car on a, dans ce cas, $X'_y = Y'_x = 0$. L'équation prend alors la forme

$$X dx + Y dy = 0,$$

et elle a pour intégrale générale

$$\int X\, dx + \int Y\, dy = C.$$

Considérons maintenant les équations du type

$$XY dx + X_1 Y_1 dy = 0 \tag{2}$$

où P_1 sont fonctions de x, Y et Y_1 fonctions de y seuls.

On dit qu'elles s'intègrent par *séparation des variables*. Il suffit, en effet, de les multiplier par le facteur $1 : X_1 Y$ pour les ramener à la forme

$$\frac{X}{X_1} dx + \frac{Y_1}{Y} dy = 0,$$

et les variables sont séparées.

En intégrant cette équation, on obtiendra l'intégrale générale de (2). Toutefois il restera à vérifier si l'on n'a pas supprimé de solution annulant le facteur X_1 ou le facteur Y.

Les solutions des équations $X_1 = 0$ et $Y = 0$ sont des valeurs

constantes $x = \alpha$ ou $y = \beta$. Ce sont aussi des solutions de l'équation (2) dont elles annulent les deux termes ; et elles peuvent être acceptables, car, au point de vue géométrique, elles correspondent à des droites parallèles aux axes.

Exemples. — Les intégrales sont en regard des équations.

$(1+x^2)y^3dx+(1-y^2)x^3dy=0$	$x^{-2}+y^{-2}=2\operatorname{Log}(Cx:y)$
$(a^2+y^2)dx=2x\sqrt{ax-a^2}\,dy$	$y-\sqrt{ax-a^2}=C(a^2+y\sqrt{ax-a^2})$
$\sec^2 x \operatorname{tg} y\,dx+\sec^2 y \operatorname{tg} x\,dy=0$	$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = C.$

140. Équations homogènes. — Si les fonctions P et Q de x, y sont homogènes et du même degré, l'équation

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

est une *équation homogène*. Dans ce cas, le quotient P : Q ne dépend que du rapport $y : x$. L'équation, résolue par rapport à y', se ramène donc au type

$$(3) \qquad y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Les variables deviennent séparables en changeant d'inconnue par la substitution

$$y = ux, \qquad \text{d'où} \qquad y' = u + xu'.$$

L'équation entre u et x sera, en effet,

$$(4) \qquad xu' = \varphi(u) - u\,;$$

d'où, en divisant par $x[\varphi(u) - u]$ et en multipliant par dx,

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}\,; \qquad \operatorname{Log} x = \int \frac{du}{\varphi(u) - u} + C.$$

On obtiendra l'*intégrale générale* de (3) en remplaçant u par $y : x$ dans l'équation précédente.

On trouve aussi des solutions en annulant le facteur supprimé $\varphi(u) - u$, ce qui donne généralement pour u un certain nombre de valeurs constantes $u = u_1$, $u = u_2$... Ces relations satisfont à l'équation (4) dont elles annulent les deux membres ; donc les relations

$$y = u_1x, \qquad y = u_2x, \ldots$$

sont des solutions de l'équation (3).

On peut aussi intégrer les équations homogènes en les rame-

nant à des différentielles exactes. Nous le ferons dans le numéro suivant.

Exemples. — Équations homogènes avec leurs intégrales en regard :

$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$	$x^2 = C^2 + 2Cy$
$(x + y)dx + (y - x)dy = 0$	$\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} = \operatorname{Log} C\sqrt{x^2 + y^2}$
$xy\,dy - y^2\,dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}dx$	$(x + y)\operatorname{Log} Cx = x e^{\frac{y}{x}}$

141. Remarques sur les équations à la fois homogènes et différentielles exactes. — 1° Quand l'équation $P\,dx + Q\,dy = 0$ réunit ces deux caractères, elle s'intègre immédiatement *sans aucune quadrature*, pourvu que son degré d'homogénéité n ne soit pas — 1. Posons, en effet,

$$F(x, y) = Px + Qy.$$

On aura, eu égard à l'identité $P'_y = Q'_x$ et au théorème d'Euler sur les fonctions homogènes (t. I, n° 115),

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P + x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial x} = P + \left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right) = (n + 1)\,P,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q + x\frac{\partial P}{\partial y} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = Q + \left(x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = (n + 1)\,Q.$$

De là, l'identité

$$d(Px + Qy) = (n + 1)\,(P\,dx + Q\,dy). \tag{5}$$

Donc, $n + 1$ n'étant pas nul, l'intégrale générale de l'équation $P\,dx + Q\,dy = 0$ sera

$$Px + Qy = C.$$

Exemples. — Equations avec leurs intégrales en regard :

$(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$	$x^3 - 6x^2y - 6y^2x + y^3 = C$
$(x^3 + 3xy^2)\,dx + (y^3 + 3x^2y)\,dy = 0$	$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = C$
$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$	$x + y e^{\frac{x}{y}} = C.$

2° Supposons encore que $P\,dy + Q\,dx$ soit une différentielle exacte. Si P et Q sont homogènes de degrés — 1, on a $n + 1 = 0$.

Donc, $Px + Qy$ ayant une différentielle totale nulle en vertu de l'équation (5), on a *identiquement* (k étant une constante déterminée)

$$Px + Qy = k.$$

on connaît donc plus d'intégrale *a priori* et il faut recourir à la méthode générale d'intégration.

3° Réciproquement, si P et Q étant homogènes et de degré -1, $Px + Qy$ se réduit identiquement à une constante k, $Pdx + Qdy$ sera une différentielle exacte. En effet, cette identité permet d'exprimer P au moyen de Q, et il vient

$$Pdx + Qdy = \frac{k - Qy}{x}dx + Qdy = k\frac{dx}{x} + (Qx)\,d\frac{y}{x}.$$

Or Qx étant de degré 0, est une fonction $\varphi(u)$ du rapport $u = y : x$; par conséquent, on a

$$Pdx + Qdy = k\frac{dx}{x} + \varphi(u)du,$$

ce qui est une différentielle exacte.

Si, en particulier, $k = 0$, l'équation se réduit à $\varphi(u)\,du = 0$; elle n'a donc d'autre intégrale que $u =$ const. ou $y = Cx$.

4° Toute équation homogène $Pdx + Qdy = 0$ peut être rendue différentielle exacte. Il suffit, pour cela, de la diviser par $Px + Qy$. En effet, l'équation homogène de degré -1

$$\frac{Pdx + Qdy}{Px + Qy} = 0,$$

est immédiatement intégrable, en vertu de la remarque 3° (le nombre k étant égal à 1). Mais le degré d'homogénéité de cette équation est -1, ce qui est le cas d'exception de la remarque 1°. N'était donc ce cas, toutes les équations homogènes s'intégreraient sans quadrature.

Le facteur, inverse de $Px + Qy$, par lequel il faut multiplier l'équation pour la rendre immédiatement intégrable, s'appelle le *facteur intégrant* de l'équation. Nous y reviendrons dans un numéro suivant.

Toutefois, si $Px + Qy$ se réduit à 0, il y a une exception, cette expression ne peut plus être l'inverse d'un facteur intégrant. On rendra l'équation différentielle exacte en la divisant par Px ou par Qy, ce qui ramène son degré à -1, et l'on retrouve le cas 3° avec $k = 0$. L'intégrale générale sera $y = Cx$.

142. Équations réductibles aux équations homogènes. — Ce sont celles du type ($A, \ldots\ a, \ldots$ constants)

$$(6) \qquad y' = \varphi\left(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}\right).$$

1° $Ab - aB$ est différent de zéro, on change, les deux variables en posant

$$\begin{aligned} \eta &= Ax + By + C, \\ \xi &= ax + by + c, \end{aligned} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{A\,dx + B\,dy}{a\,dx + b\,dy} = \frac{A + By'}{a + by'}.$$

Dans notre hypothèse, le dernier rapport n'est pas indépendant de y' (ce qui arrive si $Ab - aB = 0$), de sorte que l'équation (8) revient à l'équation *homogène* entre η et ξ

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{A + B\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}{a + b\varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)}.$$

2° Si $Ab - aB = 0$, on change d'inconnue seulement par la relation

$$\eta = \frac{Ax + By}{A} = \frac{ax + by}{a}, \qquad \text{d'où} \qquad \eta' = 1 + \frac{b}{a}y'.$$

L'équation (6) se ramène à l'équation (non homogène)

$$\eta' = 1 + \frac{b}{a}\varphi\left(\frac{A\eta + C}{a\eta + c}\right)$$

et les variables η et x se séparent.

On aura donc à intégrer l'une de ces deux équations. On remplacera η et ξ, ou η seulement, par leurs valeurs et l'on obtiendra l'intégrale générale de l'équation (6).

143. Équations linéaires. — Ce sont celles qui sont linéaires en y et y', donc du type

$$(7) \qquad y' + Xy = X_1,$$

X et X_1 désignant des fonctions de x seul. Le terme X_1 s'appelle le second membre ; s'il est nul, l'équation est *sans second membre*.

1° *L'équation linéaire sans second membre s'intègre par une seule quadrature.* En effet, elle réduit à

$$y' + Xy = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{y'}{y} = -X.$$

Les variables sont séparées, l'intégrale sera

$$\operatorname{Log} y = -\int X dx + \operatorname{Log} C, \quad \text{d'où} \quad y = Ce^{-\int X dx}.$$

2° Pour intégrer l'*équation linéaire sans second membre*, désignons par u une intégrale particulière de l'équation sans second membre. Soit par exemple,

$$u = e^{-\int X dx}$$

et changeons de fonction inconnue par la relation

$$y = uz, \quad \text{d'où} \quad y' = uz' + u'z.$$

Comme $u' + Xu$ est nul par hypothèse, l'équation (7) se réduit à

$$uz' = X_1; \quad \text{d'où} \quad z' = \frac{X_1}{u}, \quad z = C + \int \frac{X_1}{u} dx.$$

Remplaçons maintenant, dans $y = uz$, les deux facteurs u et z par les valeurs trouvées. L'intégrale générale de (7) sera donnée par la formule (comportant deux quadratures)

$$(8) \qquad y = e^{-\int X dx}\left[C + \int X_1 dx \, e^{\int X dx}\right]$$

et il n'y a pas d'intégrale singulière.

Remarques. — 1° Si l'on connaît une intégrale particulière y_1 de l'équation linéaire, son intégrale générale s'obtient par *une seule quadature.* En effet, si l'on soustrait de l'équation (7) celle qu'on en déduit en remplaçant y par y_1, l'équation devient

$$(y - y_1)' = -X(y - y_1).$$

C'est donc une équation linéaire sans second membre par rapport à $y - y_1$ et elle a pour intégrale

$$y - y_1 = Ce^{-\int X dx}.$$

2° Si l'on connaît deux intégrales particulières y_1 et y_2 de l'équation linéaire, l'intégrale s'obtient sans aucune quadrature. En effet, y_2 vérifie l'équation précédente pour une valeur particulière de C ; en divisant membre à membre, il vient

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = C.$$

Exemples. — Les intégrales sont en regard des équations.

$y' + ay = e^{mx}$	$y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}$
$y' - \frac{ny}{x+1} = e^x(x+1)^n$	$y = (x+1)^n(e^x + C)$
$y' + y\cos x = \sin x \cos x$	$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$
$y' + y\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \varphi(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$	$y = Ce^{-\varphi} + \varphi - 1$

144. Équation de Bernouilli. — En multipliant par y^n le second membre d'une équation linéaire, on obtient l'équation de Bernoulli

(9) $$y' + Xy = X_1 y^n.$$

Cette équation, divisée par y^n, se met sous la forme

$$\frac{y'}{y^n} + X\frac{1}{y^{n-1}} = X_1.$$

Prenons z pour inconnue en posant

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}, \qquad \text{d'où} \qquad z' = -(n-1)\frac{y'}{y^n};$$

l'équation se ramène à l'*équation linéaire*

$$z' - (n-1)Xz = -(n-1)X_1.$$

La valeur de z ou de $1 : y^{n-1}$ sera donc

$$\frac{1}{y^{n-1}} = e^{(n-1)\int X dx}\left[C - (n-1)\int X_1 dx\, e^{-(n-1)\int X dx}\right].$$

Cette formule devient illusoire si $n = 1$, dans ce cas, l'équation de Bernoulli se réduit à l'équation linéaire sans second membre $y' + (X - X_1)\,y = 0$.

Exemples. — Les intégrales sont en regard des équations.

$$(1 - x^2)\,y' - xy = axy^2 \qquad y^{-1} = C\sqrt{1 - x^2} - a$$

$$y' + 2xy = 2ax^3y^3 \qquad 2y^{-2} = a\,(1 + 2x^2) - Ce^{2x^2}$$

$$y^{n-1}\,(ay' + y) = x \qquad ny^n = Ce^{-\frac{nx}{a}} + nx - a$$

$$y' + \frac{xy}{1 - y^2} = x\sqrt{y} \qquad 3\sqrt{y} = C(1 - x)^{\frac{1}{4}} - (1 - x^2)$$

$$xy^2\,(xy' + y) = a^2 \qquad 2(xy)^3 = 3a^2x^2 + C.$$

145. Équation de Riccati. — C'est l'équation

$$y' + Xy^2 + X_1y + X_2 = 0,$$

où les lettres X désignent des fonctions de x seul. *Cette équation peut s'intégrer quand on en connait une solution particulière y_1.*

Posons, en effet,

$$y = y_1 + z\,;$$

l'équation devient

$$z' + (y_1' + Xy_1^2 + X_1y_1 + X_2) + Xz^2 + 2Xy_1z + X_1z = 0$$

et, y_1 étant une intégrale particulière, elle se réduit à

$$z' + z(2Xy_1 + X_1) = -Xz^2.$$

C'est une *équation de Bernoulli*, qu'on ramène à une équation linéaire en posant $z = 1 : u$. On serait donc ramené directement à une *équation linéaire* en posant tout de suite

$$y = y_1 + \frac{1}{u}.$$

Si l'on connait trois intégrales particulières y_1, y_2, y_3 de l'équation de Riccati, l'intégrale générale s'obtient sans aucune quadrature.

En effet, on connait alors deux intégrales particulières :

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}, \qquad u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1},$$

de l'équation en u. Donc l'intégrale de l'équation en u est (n° 143)

$$\frac{u - u_1}{u_1 - u_2} = \text{Const.}$$

Celle de l'équation de Riccati s'obtient par l'élimination des lettres u, ce sera

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = \text{Const.}$$

Cette formule exprime que *le rapport anharmonique de quatre intégrales de l'équation de Riccati est constant.*

Remarque. — On peut supposer X différent de 0 dans l'équation précédente, sinon elle serait linéaire. Alors, par la substitution $y = z : \mathrm{X}$, elle se ramène à la forme

$$z' + z^2 + \left(\mathrm{X}_1 - \frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}\right) z + \mathrm{X}\mathrm{X}_2 = 0,$$

ou, plus simplement, P et Q étant fonctions de x seul,

$$z' + z^2 + \mathrm{P}z + \mathrm{Q} = 0.$$

Par la substitution $z = u' : u$, celle-ci revient à l'équation du second ordre

$$u'' + \mathrm{P}u' + \mathrm{Q}u = 0.$$

Cette nouvelle équation, que nous étudierons en détail dans le chapitre suivant, est une *équation linéaire sans second membre.*

Cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati. — L'équation

$$y' + ay^2 = bx^m$$

est un cas particulier de celle de Riccati, *elle s'intègre sous forme finie, chaque fois que* $2 : (m + 2)$ *est un nombre impair (positif ou négatif), — ou, ce qui revient au même, chaque fois que* $m : (m+2)$ *est un nombre pair (positif ou négatif).*

En effet, par la substitution $y = \dfrac{u'}{au}$ elle devient

$$u'' - ab\,u\,x^m = 0.$$

C'est la transformée obtenue par *Euler*. Nous prouverons, dans le chapitre suivant, qu'elle s'intègre sous forme finie pour les valeurs de m indiquées ci-dessus.

146. Théorie du facteur intégrant ou multiplicateur. – Soit l'équation

$$(10) \qquad P dx + Q dy = 0.$$

On appelle *multiplicateur* ou *facteur intégrant* un facteur μ, généralement fonction de x et de y, tel que l'expression

$$\mu(P dx + Q dy)$$

soit une différentielle totale exacte.

I. *Il existe un facteur intégrant sous les conditions d'existence et d'unicité de l'intégrale générale.*

En effet, l'intégrale générale renferme une constante arbitraire et, résolue par rapport à cette dernière, elle prend la forme

$$F(x, y) = C.$$

Connaissant cette intégrale, on peut en déduire un facteur intégrant μ. En effet, différentions-la totalement, puis éliminons dx et dy entre l'équation obtenue et l'équation (10) ; il vient successivement

$$F'_x dx + F'_y dy = 0, \qquad \frac{F'_x}{P} = \frac{F'_y}{Q}.$$

Cette dernière équation ne renferme plus C et doit être vérifiée en tout point x, y de l'intégrale générale, donc en un point quelconque, car on peut faire passer une intégrale particulière par ce point. C'est donc une *identité* : ses deux membres ne sont que deux expressions différentes d'une même fonction de x, y que nous désignerons maintenant par μ. Il vient donc *identiquement*

$$F'_x = \mu P, \quad F'_y = \mu Q, \quad \text{d'où} \quad \mu(P dx + Q dy) = dF(x, y).$$

Donc μ est un facteur intégrant. On voit, de plus, que si l'on connaît une forme $F = C$ de l'intégrale générale, on en déduit un facteur intégrant correspondant $\mu = F'_x : P$.

On a montré au paragraphe 3 du chapitre V que les conditions d'existence et de différentiabilité admises ici pour F seront réalisées, en particulier, si l'on prend la valeur initale y_0 pour constante C.

II. *Si* $F(x, y) = C$ *et* $F_1(x, y) = C_1$ *sont deux formes différentes de l'intégrale générale de l'équation* (10), *on a*

$$F_1 = \varphi(F).$$

En effet, soient μ et μ_1 les deux facteurs intégrants correspondants à F et à F_1. On a

$$\mu(P dx + Q dy) = dF \qquad \mu_1(P dx + Q dy) = dF_1$$

d'où

$$dF_1 = \frac{\mu_1}{\mu} dF.$$

Cette relation a lieu x et y étant les variables indépendantes. Elle subsiste si l'on change ces variables. Comme F contient au moins une des deux lettres x ou y, supposons que F contienne y. Prenons alors x et F comme variables indépendantes ; cette relation montre que l'on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial F} = \frac{\mu_1}{\mu}.$$

Donc F_1 ne dépend que de F et l'on a

$$F_1 = \varphi(F), \qquad \frac{\mu_1}{\mu} = \varphi'(F).$$

III. *Il existe une infinité de facteurs intégrants, et si* μ *est l'un d'eux, ils sont tous compris dans la formule générale* $\mu\psi(F)$, *la fonction* ψ *restant arbitraire.*

Tout facteur intégrant μ_1 est de cette forme, car, si $\mu_1(P dx + Q dy) = dF_1$, μ_1 vérifie la dernière équation ci-dessus. Réciproquement, tout facteur de cette forme est intégrant, car on a

$$\psi\mu(F)(P dx + Q dy) = \psi(F) dF = d.\int\psi(F) dF,$$

ce qui est une différentielle exacte.

IV. *La connaissance d'un facteur intégrant permet d'obtenir l'intégrale générale par les quadratures et de déterminer immédiatement la solution singulière s'il y en a une.*

En effet, l'équation différentielle peut s'écrire

$$P dx + Q dy = \frac{1}{\mu} dF = 0.$$

Elle se décompose en deux autres : $dF = 0$, ce qui fournit la solution générale, et $1 : \mu = 0$, ce qui fournira la solution singulière s'il y en a une. La solution singulière jouit donc de la propriété remarquable de rendre infini le facteur intégrant.

147. Recherche d'un facteur intégrant. Cas de l'équation linéaire. — Parmi les équations étudiées précédemment, il y en a que nous avons intégrées par le procédé du facteur intégrant. Ce sont d'abord celles qui s'intègrent par séparation de variables (n° 139), car cette séparation se fait en multipliant l'équation par un facteur intégrant facile à apercevoir. Ce sont encore les équations homogènes, que l'on rend immédiatement intégrables (n° 141) en les divisant par $Px + Qy$, ce qui est donc l'inverse d'un facteur intégrant.

En dehors de ces deux cas, la recherche d'un facteur intégrant est un procédé peu pratique d'intégration et c'est plutôt l'intégration de l'équation qui conduit à la connaissance d'un facteur intégrant par la méthode indiquée au n° précédent.

Cherchons les conditions analytiques auxquelles doit satisfaire un facteur intégrant. Pour simplifier, mettons l'équation sous la forme

$$dy + P dx = 0. \tag{11}$$

La condition pour que $\mu(dy + Pdx)$ soit une différentielle exacte est

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial(\mu P)}{\partial y}.$$

C'est une équation aux dérivées partielles et l'intégration de cette équation doit être considérée comme un problème d'ordre plus élevé que celle de l'équation (11).

Comme application, cherchons à quelle condition le facteur μ sera fonction de x seul. L'équation précédente se réduit dans cette hypothèse à

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{12}$$

Il faut donc que P'_y soit fonction de x seul, c'est-à-dire que P soit une fonction linéaire de y. Les seules équations de la forme $dy + Pdx = 0$ dont le facteur intégrant soit fonction

de x seul, sont donc les équations linéaires. Pour celles-ci, P est de la forme $Xy - X_1$ et P'_y est égal à X.

Soit donc l'équation linéaire

$$dy + yX\,dx = X_1 dx\,;$$

son facteur intégrant est donné par l'équation (12), qui devient

$$\frac{\mu'}{\mu} = X, \qquad \text{d'où} \qquad \mu = e^{\int X dx}.$$

Multiplions donc l'équation linéaire par le facteur intégrant μ et observons que $\mu X = \mu'$; il vient

$$d(\mu y) = \mu X_1 dx,$$

$$y = \frac{1}{\mu}\int \mu X_1 dx.$$

C'est la formule d'intégration de l'équation linéaire (n° 143). Le facteur μ est l'inverse d'une solution de l'équation sans second membre.

EXERCICES

1. En prenant $y - X_1 : X$ pour inconnue, montrer que l'intégrale de l'équation linéaire (n° 143) peut s'écrire

$$y = \frac{X_1}{X} - e^{-\int X dx}\left[C + \int e^{\int X dx}\, d\,\frac{X_1}{X}\right].$$

2. Montrer que l'on peut intégrer l'équation

$$P(x dy - y dx) - Q dy - R dx,$$

où P, Q, R sont homogènes en x, y et Q, R du même degré.

R. On pose $y = ux$ et l'on obtient une équation de Bernoulli pour déterminer x en fonction de u.

3. Intégrer l'équation de l'exercice précédent, en supposant que P, Q, R soient linéaires en x, y, mais non plus nécessairement homogènes (Équation de *Jacobi*).

R. Si P, Q, R sont homogènes, c'est une application de l'exercice précédent. Si cette condition n'a pas lieu, on la réalise par le changement de variables

$$x = \xi + \alpha, \qquad y = \eta + \beta,$$

en déterminant les constantes α, β par les conditions

$$\frac{P(\alpha, \beta)}{1} = \frac{Q(\alpha, \beta)}{\alpha} = \frac{R(\alpha, \beta)}{\beta}.$$

En égalant chaque rapport à une même inconnue λ, on en tire trois équations linéaires entre α et β et l'élimination de α, β, fournit une équation du 3e degré pour déterminer λ.

4. La condition nécessaire et suffisante pour que $1:(Px+Qy)$ soit facteur intégrant de $Pdx+Qdy=0$ est que $P:Q$ soit homogène de degré 0.

5. La condition nécessaire et suffisante pour que $1:(Px-Qy)$ soit facteur intégrant de $Pdx+Qdy=0$ est que $Px^2:Q$ soit fonction du produit xy.

6. La condition nécessaire et suffisante pour que $Pdx+Qdy$ admette un multiplicateur homogène de degré n est que la fonction

$$\frac{y(P'_y - Q'_x) - nQy}{Px + Qy}$$

soit homogène et de degré 0.

§ 2. Équations non résolues par rapport à y'

148. Définition de l'intégrale générale. — Soit une équation

$$(1) \qquad f(x, y, y') = 0.$$

On pourra généralement tirer de cette équation plusieurs valeurs pour y', peut être même une infinité,

$$(2) \qquad y' = f_1(x, y), \qquad y' = f_2(x, y), \ldots$$

Ces équations, qui sont de la forme traitée dans le paragraphe précédent, auront chacune leur intégrale générale, soit respectivement

$$(3) \qquad F_1(x, y, C) = 0, \qquad F_2(x, y, C) = 0, \ldots$$

Ce sont autant de solutions de l'équation (1) et l'on appelle *intégrale générale* de cette équation une solution qui comprend toutes les précédentes.

Lorsqu'il n'y a qu'un nombre limité n d'équations (2) et par suite, d'équations (3), on peut obtenir cette intégrale générale en multipliant entre elles toutes les relations (3), ce qui donne

$$(4) \qquad F_1(x, y, C)\, F_2(x, y, C) \ldots F_n(x, y, C) = 0.$$

Il arrive souvent que toutes les équations (3) peuvent être comprises en une seule renfermant des fonctions à détermina-

tions multiples. Cette relation unique est alors l'intégrale générale. Si les fonctions à déterminations multiples sont des radicaux, on pourra généralement les faire disparaître par des élévations de puissance, mais il est clair que cela revient à former l'équation (4). Il est à remarquer que cette opération a déjà été faite pour plusieurs des équations proposées au paragraphe précédent. En voici un nouvel exemple : soit

$$y'^2 = 1 + y^2, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dy}{\pm\sqrt{1 + y^2}} = dx.$$

On en tire l'intégrale générale sous les deux formes

$$\operatorname{Log}\left(\frac{y \pm \sqrt{1 + y^2}}{C}\right) = \operatorname{Log} e^x, \qquad 1 + y^2 = (Ce^x - y)^2.$$

Exemples. — Les trois équations :

$$y'^3 - (x^2 + xy + y^2)\, y'^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)\, y' - x^3y^3 = 0$$
$$(a^2 - x^2)\, y'^3 + bx\,(a^2 - x^2)\, y'^2 - y' - bx = 0$$
$$\left[1 - \frac{y^2}{x^2}(x^2 + y^2)^2\right] y'^2 - \frac{2y}{x}\, y' - \frac{y}{x^2} = 0$$

reviennent aux suivantes, dont nous mettons l'intégrale en regard :

$$(y' - x^2)(y' - xy)(y' - y^2) = 0 \qquad \left(y - \frac{x^3}{3} - C\right)\left(y - Ce^{\frac{x^2}{2}}\right)\left(y - \frac{1}{C - x}\right) = 0$$
$$[(a^2 - x^2)\, y'^2 - 1](y' + bx) = 0 \qquad (y + C)^3 = \frac{bx^2}{2}\left(\arcsin \frac{x}{2}\right)^2$$
$$(xy' - y)^2 = [yy'(x^2 + y^2)]^2 \qquad y = x \operatorname{tg}\left(C + \frac{y^2}{2}\right).$$

149. Équations où manque une variable. — Elles sont de l'une des deux formes suivantes (la seconde se ramènerait d'ailleurs à la première en prenant x pour inconnue) :

$$f(x, y') = 0 \qquad \text{ou} \qquad f(y, y') = 0.$$

On ramène immédiatement l'intégration à une quadrature en résolvant l'équation par rapport à y'. Mais il arrive que l'équation soit plus facile à résoudre par rapport à x (ou à y) que

par rapport à y'. Dans ce cas, en faisant la résolution et en remplaçant y' par p, on obtient (suivant l'hypothèse)

$$\left\{\begin{array}{l} x = \varphi(p) \\ y - C = \int p\,dx = \int p\varphi'(p)\,dp \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} y = \varphi(p) \\ x - C = \int \dfrac{dy}{p} = \int \dfrac{\varphi'(p)\,dp}{p} \end{array}\right.$$

C'est une *représentation paramétrique* de l'intégrale : x et y sont exprimés en fonction de p. En éliminant p entre les deux relations, on met l'intégrale sous la forme habituelle.

Exemples. — I. Soit l'équation $x = p^3 + 1$; il vient

$$y = \int p\,dx = 3\int p^3\,dp = \frac{3}{4}p^4 + C.$$

En éliminant p, il vient $(x - 1)^4 = \left[\frac{4}{3}(y - C)\right]^3$.

II. Soit l'équation $x = \dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$; il vient

$$y - C = \int p\,dx = px - \int x\,dp = px - a\int \frac{p\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = px - a\sqrt{1+p^2}.$$

$$y - C = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}.$$

En éliminant p, il vient $x^2 + (y - C)^2 = a^2$.

150. Équations homogènes. — Désignons encore y' par p et soit $f(x, y, p) = 0$ une équation homogène par rapport aux deux variables x, y. En divisant par une puissance convenable de x et en posant $y = ux$, l'équation prend la forme $F(u, p) = 0$. Si on peut la résoudre par rapport à p, elle se ramène à la forme étudiée au n° 140. Laissons ce cas de côté. Si on peut larésoudre par rapport à u, on aura

$$u = \varphi(p).$$

Cherchons la relation entre x et p. En différentiant $y = ux$ on obtient

$$dy = p\,dx = u\,dx + x\,du,$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u} = \frac{\varphi'(p)\,dp}{p - \varphi(p)}.$$

L'équation différentielle entre x et p est à variables séparées et donne x en fonction de p par une quadrature. On obtient ensuite y en fonction de p par la relation $y = nx + x\varphi(p)$. On a donc une représentation paramétrique de l'intégrale.

Exemples. — Voici trois équations avec, en regard, soit x exprimé en fonction de p, soit l'intégrale générale :

$y = px + nx\sqrt{1+p^2}$	$x = \dfrac{C}{\sqrt{1+p^2}}\left(\sqrt{1+p^2} - p\right)^{\frac{1}{n}}$
$y\sqrt{1+p^2} = n(x + py)$	$(x - C)^2 + y^2 = (nC)^2$
$y = yp^2 + 2px$	$y^2 = 2Cx + C^2$

151. Équations qui s'intègrent par dérivation. — Soit une équation résolue par rapport à y

$$(5) \qquad y = f(x, y').$$

En y remplaçant y' par p, elle devient

$$(6) \qquad y = f(x, p).$$

Cette équation peut aussi être considérée comme celle de l'intégrale, à condition d'y remplacer p par une fonction de x telle que $y' = p$. Si l'on dérive cette équation, on voit que, pour cela, p doit vérifier la condition nécessaire et suffisante :

$$(7) \qquad p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}.$$

C'est une équation du premier ordre entre p et x. Si on sait l'intégrer, on en tirera

$$(8) \qquad F(x, p, C) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad p = \varphi(x, C).$$

Portons cette valeur de p dans l'équation (6), nous trouvons l'intégrale

$$y = f(x, \varphi).$$

L'intégrale générale de (5) s'obtient donc en éliminant p entre (6) et (8) et, si l'on a soin de tenir compte de toutes les solutions de l'équation (8), on ne laissera échapper par cette méthode aucune intégrale de l'équation (5). On pourrait aussi résoudre l'équation (8) par rapport à x, puis porter la valeur

dans (6) ; on aurait exprimé ainsi x et y en fonction de p et obtenu, par conséquent, une représentation paramétrique de l'intégrale.

Les équations traitées dans les deux n°s suivants fournissent des exemples de cette méthode.

152. Équation linéaire en x et y. — Elle est de la forme (p désignant y')

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{9}$$

En la dérivant, on en tire

$$p = \varphi(p) + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \tag{10}$$

On peut vérifier cette équation en annulant $p - \varphi(p)$ et $\frac{dp}{dx}$; nous y reviendrons dans un instant. Supposons d'abord qu'aucune de ces quantités ne soit nulle ; l'équation peut s'écrire

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Cette équation est linéaire en considérant x comme l'inconnue et p comme la variable indépendante. On sait l'intégrer et l'on trouve x en fonction de p et d'une constante arbitraire. En éliminant p entre cette relation et l'équation (9), on obtient l'intégrale générale. Si, au lieu de cela, on porte la valeur de x dans (9), x et y sont exprimés en fonction de p et l'on a une représentation paramétrique de l'intégrale.

Annulons maintenant $p - \varphi(p)$. On en tire généralement un certain nombre de valeurs constantes $p_1, p_2, \ldots$ qui satisfont à l'équation (10), car $\frac{dp}{dx}$ est alors nul aussi. En portant ces valeurs de p dans l'équation (9), on en tire un certain nombre de solutions singulières qui, géométriquement, représentent des droites.

Exemples. — Les équations homogènes traitées au n° 150 peuvent aussi se résoudre par cette méthode. Voici d'autres exemples où les équations ne sont pas homogènes. Nous met-

tons l'équation à intégrer dans la première colonne, la valeur de x en fonction de p en regard.

$y = x(1+p) + p^2$	$x = Ce^{-p} - 2(p-1)$
$y = 2px + \sqrt{1+p^2}$	$p^2x = C + \int \frac{p^2dp}{\sqrt{1+p^2}}$
$y = 2px - p^2$	$3p^2x = C + 2p^3$

153. Équation de Clairaut. — La méthode du n° précédent échoue si $\varphi(p)$ se réduit à p. Dans ce cas, on obtient l'*équation de Clairaut*, qui a donc pour type

$$(11) \qquad y = px + \psi(p).$$

En la dérivant, il vient

$$y' = p + [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}$$

et, pour qu'on ait $y' = p$, il faut et il suffit que $[x + \psi'(p)]\dfrac{dp}{dx} = 0$.

Cette équation peut être satisfaite de deux manières :

1° En posant $\dfrac{dp}{dx} = 0$ d'où $p = C$.

Portant cette valeur dans (11), on obtient l'intégrale générale

$$y = Cx + \psi(C),$$

qui représente géométriquement un système de droites.

2° En posant $x + \psi'(p) = 0$.

Si on élimine p dans cette équation et (11), on obtient une solution sans constante arbitraire. C'est une intégrale singulière, car elle ne peut rentrer dans l'intégrale générale (p étant maintenant fonction de x). La solution singulière représente donc une courbe.

L'intégrale générale se compose de toutes les tangentes à la courbe représentée par la solution singulière.

En effet, toute solution particulière est donnée par l'équation $y = px + \psi(p)$ où p est constant. Cette droite passe par le point de la courbe qui a pour abscisse $x = -\psi'(p)$. Comme le coefficient angulaire y' de la courbe en ce point est égal à p par notre calcul lui-même, la droite touche donc la courbe en ce point.

Réciproquement, l'équation différentielle des tangentes à une courbe revient à une équation de Clairaut.

En effet, l'équation d'une droite étant $y = px + q$, pour exprimer qu'elle touche la courbe $\beta = f(\alpha)$, on écrira

$$f(\alpha) = p\alpha + q, \qquad p = f'(\alpha).$$

En éliminant α entre ces deux relations, on obtient une relation de la forme $q = \psi(p)$. L'équation générale des tangentes est donc

$$y = px + \psi(p)$$

et elle dépend d'une constante arbitraire p. Pour former l'équation différentielle des tangentes, il faut éliminer p entre cette équation et sa dérivée $y' = p$; on forme donc une équation de Clairaut.

Exemples. — Voici quelques équations de Clairaut avec leurs intégrales singulières en regard :

$$y = px + p - p^2 \qquad\qquad 4y = (x+1)^2$$

$$y = px + \sqrt{a^2 - b^2p^2} \qquad\qquad by\sqrt{x^2 + b^2} = a(x^2 + b^2)$$

$$y = px + \sqrt{1 + p^2} \qquad\qquad x^2 + y^2 = 1.$$

EXERCICES

1. Intégrer les équations

$$ayy'^2 + (2x - b)y' - y = 0$$

$$(4x^2 - a^2)y'^2 - 4xyy' + y^2 - a^2 = 0$$

$$(y - x)\sqrt{1 + x^2}\,dy = n(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

R. La première se ramène à une équation de Clairaut par la substitution $y^2 = u$, et la seconde à une équation linéaire en x, y en la résolvant par rapport à y.

Pour intégrer la troisième, on pose $x = \operatorname{tg} u$, $y = \operatorname{tg} v$, ce qui ramène à l'équation $\sin(v - u)\,du = n\,dv$ et les variables se séparent en posant $v - u = z$.

2. L'équation de Clairaut est la seule qui s'intègre en remplaçant y par C (Mansion).

3. *Transformation de Legendre.* Elle consiste à prendre comme nouvelles variables

$$X = y', \qquad Y = xy' - y.$$

En différentiant ces relations, on en tire, sans difficulté,

$$x = \frac{dY}{dX}, \qquad y = X\frac{dY}{dX} - Y, \qquad y' = X.$$

Par cette substitution, on ramène l'une à l'autre les deux équations

$$f(x, y, y') = 0, \qquad f\left(\frac{dY}{dX}, X\frac{dY}{dX} - Y, X\right) = 0$$

et l'intégrale de l'une fait connaître celle de l'autre.

Par exemple, l'équation $\Phi(xy' - y) = x\varphi(y')$ devient $\Phi(Y) = \frac{dY}{dX}\varphi(X)$ et les variables se séparent.

Cette substitution suppose toutefois que y'' ne soit pas nul. Si on l'applique à une équation de Clairaut, on ne trouve que la solution singulière.

§ 3. Applications géométriques des équations du premier ordre

154. Problème des trajectoires. — *Soit* $F(x, y, \alpha) = 0$ *une équation renfermant un paramètre* α, *et qui représente, en axes rectangulaires, une famille des courbes planes* F ; *on demande de trouver les courbes qui rencontrent, sous un même angle donné* ω, *toutes les courbes de cette famille.*

Soit (x, y) un point du plan. Considérons une courbe de la famille (F) et une trajectoire passant par ce point. Soient, en ce point, φ l'inclinaison sur l'axe des x de la tangente à la courbe et $\varphi' = \varphi + \omega$ l'inclinaison de la tangente à la trajectoire. On a

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi' - \omega) = \frac{\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\omega}{1 + \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}\omega}.$$

Ceci posé, formons l'équation différentielle des courbes de la famille (F), ce qui se fait en éliminant α entre $F = 0$ et sa dérivée. Cette équation sera de la forme

$$(2) \qquad f(x, y, y') = 0.$$

Dans cette équation, y' représente $\operatorname{tg}\varphi$. Si nous voulons en déduire l'équation différentielle des trajectoires, il faut former une équation dans laquelle y' représente $\operatorname{tg}\varphi'$. En vertu de la

relation (1) entre $\operatorname{tg} \varphi$ et $\operatorname{tg} \varphi'$, il faut, pour cela, remplacer, dans l'équation (2), y' par l'expression

$$\frac{y' - \operatorname{tg} \omega}{1 + y' \operatorname{tg} \omega}. \tag{3}$$

D'où la règle : *L'équation différentielle des trajectoires s'obtient en formant l'équation différentielle des courbes* (F) *et en y remplaçant y' par* $(y' - \operatorname{tg} \omega) : (1 + y' \operatorname{tg} \omega)$.

Les trajectoirees sont *orthogonales* ou *obliques* selon que l'angle ω est droit ou ne l'est pas. Dans le cas des trajectoires orthogonales, $\operatorname{tg} \omega$ est infini, l'expression (2) se réduit à $-1 : y'$. Donc *l'équation des trajectoires orthogonales s'obtient en remplaçant y' par $-1 : y'$ dans l'équation différentielle des courbes* (F).

Si l'angle ω est nul, la courbe cherchée touche toutes les courbes de la famille (F). On peut considérer le problème de trouver cette courbe comme un cas-limite de celui des trajectoires. L'expression (3) se réduit à y' et l'équation des trajectoires coïncide avec l'équation différentielle des courbes (F). La solution du problème ne peut donc être donnée que par une intégrale singulière de l'équation (2).

155. Exemples de trajectoires obliques. — Cherchons les trajectoires des droites

$$y = \alpha x.$$

L'équation différentielle de ces droites est $xy' = y$. Donc celle des trajectoires sera, d'après la règle,

$$x(y' - \operatorname{tg} \omega) = y(1 + y' \operatorname{tg} \omega),$$

d'où

$$x\,dy - y\,dx = \operatorname{tg} \omega\,(x\,dx + y\,dy).$$

Cette équation homogène s'intègre immédiatement en la divisant par $x^2 + y^2$; il vient

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} = \operatorname{tg} \omega \left[\frac{1}{2} \operatorname{Log}(x^2 + y^2) - \operatorname{Log} C\right]$$

ou, plus simplement, en coordonnées polaires r et θ,

$$r = Ce^{\theta \cot \omega}.$$

Les trajectoires sont donc des *spirales logarithmiques*.

REMARQUE. — Si l'on considère un cône circulaire droit ayant le plan xy pour base, les trajectoires précédentes sont les projections sur ce plan d'une courbe du cône, qui coupe toutes les génératrices sous le même angle et qu'on appelle *hélice cylindroconique*. On voit donc que les projections d'une hélice cylindroconique sur le plan de base sont des spirales logarithmiques.

156. Exemples de trajectoires orthogonales. Systèmes orthogonaux. — Une famille de courbes et ses trajectoires orthogonales forment ce qu'on appelle un *système orthogonal*. Nous allons en faire connaître quelques exemples simples :

I. Considérons les courbes paraboliques

$$y = \alpha x^a.$$

Leur équation différentielle est $xy' = ay$. Donc celles des trajectoires orthogonales sera

$$ayy' + x = 0, \qquad \text{d'où} \qquad ay^2 + x^2 = C.$$

Les trajectoires sont des coniques ayant l'origine pour centre. En particulier, si $a = -1$, on a le *système orthogonal* :

$$xy = \alpha, \qquad x^2 - y^2 = C,$$

composé de deux familles d'hyperboles équilatères : les axes coordonnés sont les asymptotes des courbes de la première famille et les axes de symétrie des courbes de la seconde.

II. Considérons les *coniques homofocales*

$$\frac{x^2}{a + C} + \frac{y^2}{b + C} = 1.$$

Leur équation différentielle est (n° 109)

$$y'^2 + \frac{x^2 - y^2 + a - b}{xy} y' - 1 = 0.$$

Cette équation se reproduit par le changement de y' en $1:y'$. Donc le système des coniques homofocales contient ses propres trajectoires et forme à lui seul un système orthogonal. Par chaque point du plan passent effectivement deux courbes de la famille, une ellipse et une hyperbole, qui se coupent à angle droit.

157. Lignes de niveau et de plus grande pente d'une surface. — Soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation d'une surface rapportée à des axes rectangulaires. Nous supposerons l'axe des z vertical et, par conséquent, le plan xy horizontal.

Les *lignes de niveau* de la surface sont les intersections de la surface par des plans horizontaux.

Les *lignes de plus grande pente* sont celles dont la tangente fait, en chaque point, le plus grand angle possible avec le plan horizontal. Cette tangente est donc perpendiculaire à la tangente horizontale (qui est celle de la ligne de niveau). Les lignes de plus grande pente sont donc des trajectoires orthogonales des lignes de niveau sur la surface.

Nous allons former les équations différentielles des projections de ces deux sortes de lignes sur le plan xy.

On obtient une ligne de niveau en coupant la surface par le plan $z = \alpha$. La projection de cette ligne sur le plan xy a pour équation

$$F(x, y, \alpha) = 0.$$

Pour former l'équation différentielle de ces projections, il faut dériver cette équation et éliminer α.

Passons aux lignes de plus grande pente. Ce sont les trajectoires orthogonales des lignes de niveau sur la surface. Mais l'orthogonalité subsiste en projection sur le plan horizontal, parce que les lignes de niveau sont horizontales et, par conséquent, le plan projetant perpendiculaire à la ligne de niveau. Donc les projections des lignes de plus grande pente sur le plan xy sont les trajectoires orthogonales des projections des lignes de niveau ; leur équation différentielle s'obtient en remplaçant y' par $-1:y'$ dans l'équation différentielle des projections des lignes de niveau.

Appliquons cette théorie aux surfaces à centre du second degré

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = H.$$

En remplaçant z par α et en dérivant, on forme l'équation différentielle des projections des lignes de niveau

$$Ax + Byy' = 0.$$

Celle des projections des lignes de plus grande pente sera

$$Axy' - By = 0.$$

C'est une équation à variables séparées, ayant pour intégrale

$$y^{A} = \alpha x^{B}.$$

Si l'on suppose A = B, la surface est de révolution, les projections des lignes de plus grande pente sont des droites et ces lignes elles-mêmes sont les méridiennes de la surface.

EXERCICES

1. Les distances de l'origine aux points où la tangente coupe l'axe des y et où la normale coupe l'axe des x, sont dans un rapport constant a. Trouver la courbe.

R. L'équation différentielle est $ydx - xdy = a(xdx + ydy)$. La courbe est une spirale logarithmique.

2. L'ordonnée à l'origine de la tangente est $kx^m y^n$. Trouver la courbe.

R. On obtient une équation différentielle de Bernoulli.

3. La projection sur le rayon vecteur de la normale terminée à l'axe des x, est une constante a. Trouver la courbe.

R. C'est une section conique $r = a : (1 - C \cos \theta)$.

4. Trajectoires orthogonales des paraboles $y^2 = 2p(x - \alpha)$.

R. Leur équation est $\text{Log}\, y = -\dfrac{x}{p} + C$.

5. Trajectoires orthogonales des cissoïdes $y^2(2\alpha - x) = x^3$.

R. En coordonuées polaires, $r^2 = C(1 + \cos^2\theta)$.

6. Trajectoires orthogonales des cercles $x^2 + y^2 = \alpha x$.

R. Leur équation est $x^2 + y^2 = Cy$.

7. Trajectoires orthogonales des courbes $r^2 = a^2 \text{Log tg} (\text{tg}\, \theta : \alpha)$.

R. On trouve $2r^2(\sin^2\theta + C) = a^2$.

8. Le produit des segments compris sur deux axes rectangulaires entre l'origine et la tangente, est une constante k^2. Trouver la courbe.

R. Équation différentielle de Clairaut $y = px + k\sqrt{-p}$. Solution singulière $4xy = k$. C'est la courbe cherchée.

9. Courbes dont la tangente est à une distance constante a de l'origine.

R. Équation différentielle de Clairaut $y = px + a\sqrt{1 + p^2}$. Solution singulière $x^2 + y^2 = a^2$.

10. La portion de tangente entre deux axes rectangulaires est une constante a. Trouver la courbe.

R. Équation de Clairaut $y = px + ap : \sqrt{1 + p^2}$. Solution singulière $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

11. Trouver une courbe telle que l'aire S comprise entre la courbe, l'axe des x et deux ordonnées quelconques, soit proportionnelle à l'arc s compris entre les mêmes ordonnées.

R. La courbe est une chaînette ayant pour base l'axe des x.

12. Trouver la développante (trajectoire orthogonale des tangentes) de la chaînette $y = (e^{mx} + e^{-mx}) : 2m$, en prenant comme origine de cette développante sur la courbe le point le plus bas. — Cette développante s'appelle *tractrice ;* la tractrice est aussi : 1° la courbe dont la tangente est de longueur constante ; 2° la trajectoire orthogonale d'une famille de cercles de même rayon, dont les centres sont en ligne droite.

13. Trouver la route suivie par un rayon lumineux qui traverse un milieu dans lequel l'indice de réfraction varie proportionnellement à la profondeur.

CHAPITRE VII

Équations d'ordre supérieur au premier

§ 1. Équations linéaires sans second membre

158. Notations. Premières propriétés. — Une équation *linéaire et homogène* ou *linéaire sans second membre* est une équation linéaire et homogène par rapport à y et à ses dérivées successives. Celle d'ordre n est donc de la forme

$$X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_{n-1} y' + X_n y = 0,$$

où les lettres X désignent des fonctions de x seul, et les exposants des indices de dérivation. On fait varier x dans un intervalle où les fonctions X sont continues et où X_0 ne s'annule pas. On peut alors diviser toute l'équation par X_0. Autant admettre *a priori* que $X_0 = 1$, auquel cas l'équation devient

$$(1) \qquad y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_{n-1} y' + X_n y = 0,$$

les fonctions X étant toujours supposées continues. Cette équation satisfait aux conditions de continuité qui assurent l'existence et l'unicité de son intégrale générale. De là, le théorème suivant :

Théorème I. — *Dans tout intervalle de continuité des fonctions* X, *l'intégrale de l'équation linéaire et homogène de forme* (1) *est entièrement déterminée par sa valeur initiale et celles de ses $n - 1$ premières dérivées en un point donné x_0, et le choix de ces valeurs est arbitraire. Il n'y a point de solution singulière.*

Ce théorème contient, comme cas particulier, le suivant, qui est d'un usage fréquent :

Théorème II. — *Une intégrale qui s'annule ainsi que $n - 1$ premières dérivées en un point donné x_0, est identiquement nulle.*

En effet, $y = 0$ est une intégrale particulière qui satisfait à ces conditions et, par conséquent, c'est la seule.

Le premier membre de l'équation (1) est un *polynome symbolique* de degré n en y. Si l'on pose, en abrégé,

$$(2) \qquad f(y) = y_n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y,$$

l'équation (1) s'écrit plus simplement

$$f(y) = 0.$$

Soient $v_1, v_2, \ldots$ des fonctions de x ; $C_1, C_2, \ldots$ des constantes quelconques ; on vérifie de suite que le polynome symbolique $f(y)$ jouit de la propriété exprimée par la relation

$$f(C_1 v_1 + C_2 v_2 + \cdots) = C_1 f(v_1) + C_2 f(v_2) + \cdots$$

On en conclut le théorème suivant :

Théorème III. — *Si $u_1, u_2, \ldots$ sont des solutions particulières de l'équation $f(y) = 0$, la fonction $y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots$ en est une solution plus générale.*

159. Wronskien. — Soient $v_1, v_2, \ldots v_n$ des fonctions de x supposées dérivables jusqu'à l'ordre $n - 1$; nous désignerons par $W(v_1, v_2, \ldots v_n)$ ou simplement par W et nous appellerons *Wronskien* de $v_1, v_2, \ldots v_n$ le déterminant

$$W = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ v_1' & v_2' & \cdots & v_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^{n-1} & v_2^{n-1} & \cdots & v_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

formé avec les fonctions v et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$. Ces déterminants jouent un rôle fondamental dans la théorie de l'équation linéaire.

On remarque immédiatement qu'un wronskien est identiquement nul si deux des fonctions $v_1, v_2 \ldots$ sont égales entre elles.

160. Théorème. — *Considérons n solutions particulières $u_1, u_2, \ldots u_n$ de l'équation (1). Si leur wronskien W s'annule au point x_0, il est identiquement nul et les fonctions $u_1, u_2, \ldots$ sont liées par une relation linéaire à coefficients constants et non tous nuls*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0.$$

En effet, nous pouvons déterminer n constantes α, non toutes nulles, par la condition que les n équations, linéaires et homogènes en α,

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0, \\ &\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' + \cdots + \alpha_n u_n' = 0, \\ &\cdots \\ &\alpha_1 u_1^{(n-1)} + \alpha_2 u_2^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n u_n^{(n-1)} = 0, \end{aligned}$$

soient vérifiées pour $x = x_0$, car le déterminant du système est le wronskien W nul au point x_0. Ceci fait, $y = \Sigma \alpha u$ est une intégrale de (1) qui s'annule ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées pour $x = x_0$. Donc on a $y = 0$ (par le théorème II du n° 58) et la première relation du système (3) est identique : les u sont reliés par une relation linéaire à coefficients constants non tous nuls. Dérivons $n - 1$ fois cette identité, il s'ensuit que les relations suivantes du système (3) sont aussi des identités. Alors l'élimination des α (non tous nuls) entre ces n identités, donne, quel que soit x, $W = 0$.

Il résulte de ce théorème que *le wronskien de n solutions de l'équation* (1) *ne peut s'annuler qu'à la condition d'être identiquement nul.* Il ne faut pas perdre de vue que cette conclusion repose, comme le théorème II invoqué, sur l'hypothèse que les coefficients X de l'équation (1) sont des fonctions continues de x.

Lorsque n solutions u_1. u_2,... u_n sont liés par une relation linéaire et à coefficients non tous nuls, de la forme $\Sigma \alpha u = 0$, on dit qu'elles sont *linéairement dépendantes.* Dans le cas contraire, elles sont *linéairement indépendantes.* Du théorème qui précède, on déduit le corollaire suivant :

Corollaire. — *La condition nécessaire et suffisante pour que n solutions de l'équation* (1) *soient linéairement dépendantes est que leur wronskien* W *soit identiquement nul.*

En effet, si W s'annule en un point, il s'annule identiquement et l'on a, en vertu du théorème précédent, $\Sigma \alpha u = 0$. Réciproquement, si l'on a cette identité, et qu'on la dérive $n - 1$ fois, l'élimination des α donne identiquement $W = 0$.

Réciproquement, la condition pour que n solutions de

l'équation (1) *soient linéairement indépendantes est que leur wronskien ne soit identiquement nul.*

Un système de n solutions linéairement indépendantes de l'équation (1) (ou dont le wronskien n'est pas identiquement nul) s'appelle un *système fondamental* de solutions.

161. Intégration de l'équation linéaire sans second membre. — *L'équation linéaire et homogène d'ordre n admet toujours n solutions particulières $u_1, u_2, \ldots u_n$ formant un système fondamental, auquel cas son intégrale générale est donnée par la formule*

$$(1) \qquad y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n,$$

où les C désignent n constantes arbitraires.

On peut trouver n intégrales particulières formant un système fondamental. Pour cela, on détermine ces n intégrales par la condition n° 158, Théor. I) que tous les éléments de leur wronskien aient des valeurs assignées au point donné $x = \xi_0$, valeurs choisies de manière qu'elles n'allulent pas W. Alors, W ne s'annulant pas identiquement, le système est fondamental.

Ceci fait, y est l'intégrale générale. En effet, on peut choisir les constantes C de manière que y et ses $n - 1$ premières dérivées prennent des valeurs assignées au point x_0 (différent ou non de ξ_0). Pour cela, on fait $x = x_0$ et l'on substitue ces valeurs de $y, y', \ldots$ dans le système

$$y = \Sigma Cu. \qquad y' = \Sigma Cu', \ldots, \qquad y^{n-1};$$

on en déduit les C, car le déterminant du système est le wronskien W qui ne peut s'annuler.

§ 2. Équation linéaire avec second membre Abaissement des équations

162. Équation linéaire avec second membre. Forme de l'intégale générale. — *L'équation linéaire non homogène,* ou *avec second membre,* ou encore *complète,* contient un terme X

indépendant de y et de ses dérivées successives. Celle d'ordre n sera donc de la forme

$$(5) \qquad f(y) = X,$$

où $f(y)$ désigne, comme précédemment, le polynome symbolique

$$f(y) = y^n + X_1 y^{n-1} + \cdots + X_n y.$$

On a le théorème suivant :

L'intégrale générale de l'équation complète est la somme d'une intégrale particulière de cette équation et de l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Il n'y a pas de solution singulière.

En effet, soit y_1 une intégrale particulière de l'équation (5) ; on a $f(y)=X$. Substituons à y une nouvelle fonction inconnue z par la relation $y = y_1 + z$; l'équation (5) devient

$$f(y_1 + z) = f(y_1) + f(z) = X.$$

Elle se réduit à $f(z) = 0$. Donc z est l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Celle-ci n'ayant pas de solution singulière, l'équation (5) n'en a pas non plus.

Le théorème précédent fait connaître la forme de l'intégrale générale de l'équation complète. Il ramène l'intégration de cette équation à la recherche d'une intégrale particulière et à l'intégration de l'équation sans second membre. C'est une méthode d'intégration qui peut être utilisée dans des cas particuliers et dont nous rencontrerons des exemples plus loin. Mais le théorème général pour l'intégration de l'équation sans second membre est le suivant :

163. Intégration de l'équation avec second membre. Méthode de Lagrange (ou de la variation des constantes arbitraires). — *L'intégration de l'équation linéaire complète d'ordre n se ramène à celle de l'équation sans second membre et à n quadratures.*

Nous allons établir ce théorème par la méthode de Lagrange ou de la *variation des constantes arbitraires.*

Soit $u_1, u_2, \ldots u_n$ un système fondamental de solutions de l'équation linéaire sans second membre $f(y) = 0$, de sorte que celle-ci a pour intégrale générale

$$y = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n,$$

où les C sont des constantes arbitraires.

Nous pouvons faire en sorte que cette même expression devienne l'intégrale générale de l'équation avec second membre, à condition d'y remplacer les C par des fonctions de x convenablement choisies. D'ailleurs, comme nous disposons de n fonctions C, nous pouvons encore les assujettir à $n - 1$ conditions supplémentaires.

Nous poserons les $n - 1$ conditions suivantes :

$$(6) \qquad \begin{cases} u_1 \dfrac{dC_1}{dx} + u_2 \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + u_n \dfrac{dC_n}{dx} = 0, \\ u_1' \dfrac{dC_1}{dx} + u_2' \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + u_n' \dfrac{dC_n}{dx} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_1^{n-2} \dfrac{dC_1}{dx} + u_2^{n-2} \dfrac{dC_2}{dx} + \cdots + u_n^{n-2} \dfrac{dC_n}{dx} = 0, \end{cases}$$

en vertu desquelles les $n - 1$ premières dérivées de y conservent la même forme que si les C étaient constants, à savoir

$$\begin{aligned} y' &= C_1 u_1' + C_2 u_2' + \cdots + C_n u_n', \\ y'' &= C_1 u_1'' + C_2 u_2'' + \cdots + C_n u_n'', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{n-1} &= C_1 u_1^{n-1} + C_2 u_2^{n-1} + \cdots + C_n u_n^{n-1}. \end{aligned}$$

Il vient alors, en dérivant une fois de plus,

$$y^n = C_1 u_1^n + C_2 u_2^n + \cdots + u_1^{n-1} \frac{dC_1}{dx} + u_2^{n-1} \frac{dC_2}{dx} + \cdots$$

Substituons ces valeurs de $y, y', \ldots y^n$ dans l'équation (5) de manière à exprimer que y est une intégrale. Les coefficients de $C_1, C_2, \ldots$ sont $f(u_1) = 0, f(u_2) = 0, \ldots$ de sorte que l'équation se réduit à

$$(7) \qquad u_1^{n-1} \frac{dC_1}{dx} + u_2^{n-1} \frac{dC_2}{dx} + \cdots + u_n^{n-1} \frac{dC_n}{dx} = X.$$

Les équations (6) et (7) forment un système de n équations, résoluble par rapport aux n dérivées inconnues $\frac{dC}{dx}$, car le déterminant du système est le wronskien W qui est différent de zéro. On tire donc de ce système

$$\frac{dC_1}{dx} = \varphi_1(x), \qquad \frac{dC_2}{dx} = \varphi_2(x), \ldots \qquad \frac{dC_n}{dx} = \varphi_n(x),$$

et les valeurs des fonctions $C_1, C_2, \ldots C_n$ s'en déduisent par n quadratures. L'intégrale générale de l'équation (5) sera

$$y = u_1 \int \varphi_1(x)dx + u_2 \int \varphi_2(x)dx + \cdots + u_n \int \varphi_n(x)dx.$$

Si l'on réunit tous les termes contenant les constantes d'intégration introduites par ces quadratures, on forme l'intégrale générale de l'équation sans second membre, conformément au principe établi dans le numéro précédent.

164. Méthode de Cauchy. — On doit à Cauchy une méthode intéressante, qui permet de représenter par une intégrale définie une solution particulière de l'équation $f(y) = X$. Soit $y = \Sigma Cu$ l'intégrale générale de l'équation $f(y) = 0$. Remplaçons x par α dans le système d'équations

$$\Sigma Cu = 0, \qquad \Sigma Cu' = 0, \ldots \qquad \Sigma Cu^{(n-1)} = X;$$

tirons-en les valeurs des C en fonction de α, puis portons ces valeurs dans l'intégrale $y = \Sigma Cu$ (où les u sont de nouveau fonctions de x) ; nous obtenons $y = \psi(x, \alpha)$. *Je dis que l'intégrale définie*

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} \psi(x, \alpha)\, d\alpha$$

est une solution particulière de $f(y) = X$.

En effet, on a, par hypothèse, car c'est le système d'où l'on tire les C,

$$(8) \quad \psi(\alpha, \alpha) = 0, \qquad \psi'_x(\alpha, \alpha) = 0, \ldots \qquad \psi_x^{(n-1)}(\alpha, \alpha) = X(\alpha).$$

Or, z, étant quelconque, peut être remplacé par toute autre lettre. On a donc aussi

$$\varphi(x, x) = 0, \qquad \varphi'_x(x, x) = 0, \ldots \qquad \varphi_x^{n-1}(x, x) = X.$$

Différentions $n - 1$ fois y_1, en tenant compte de ces relations ; il vient

$$y'_1 = \int_{x_0}^{x} \varphi'_x dz, \ldots \qquad y_1^{n-1} = \int_{x_0}^{x} \varphi_x^{n-1} dz, \qquad y_1^n = \int_{x_0}^{x} \varphi_x^n dz + X.$$

Substituons ces valeurs dans $f(y_1)$ et observons que, φ étant une intégrale $f(y) = 0$, on a $f(\varphi) = 0$; il vient (C. Q. F. D.)

$$f(y_1) = \int_{x_0}^{x} f(\varphi)dx + X = X.$$

Cas particulier. — Appliquons, en particulier, la méthode de Cauchy à l'équation

$$y_n = X.$$

L'intégrale de l'équation sans second membre est un polynome arbitraire de degré $n - 1$. Donc $\varphi(x, z)$ est un polynome en x de degré $n - 1$. Ce polynome est déterminé par les conditions (8). Les $n - 1$ premières montrent que z en est une racine d'ordre $n - 1$, donc que le polynome est de la forme $(x - z)^{n-1}F(z)$. Alors $F(z)$ est immédiatement déterminé par la dernière équation (8) ; on a

$$\varphi(x, z) = \frac{(x - z)^{n-1}}{(n - 1)!} X(z),$$

d'où

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - z)^{n-1}}{(n - 1)!} X(z)dz.$$

165. Méthode d'abaissement de l'Alembert. — *Si l'on connait une solution particulière, autre que 0, de l'équation linéaire sans second membre, on peut, moyennant une quadrature, abaisser l'ordre de l'équation d'une unité sans altérer ces deux caractères.*

En effet, soit u_1 cette solution particulière. Changeons d'inconnue par la relation

$$y = u_1 z,$$

Les dérivées y', y'',... se calculent par la formule

$$y_p = u_1 z_p + pu_1^{p-1}z^{p-1} + \cdots + u_1^p z \quad (p = 1, 2, \ldots)$$

Portons ces valeurs dans l'équation $f(y) = 0$ d'ordre n ; le coefficient de z^n sera u_1, celui de z sera $f(u_1) = 0$. Donc, si l'on désigne par les lettres ξ des fonctions connues de x, l'équation en z sera

$$u_1 z_n + \xi_1 z_{n-1} + \cdots + \xi_{n-1} z' = 0.$$

Cette équation linéaire et homogène se réduit à l'ordre $n - 1$ en prenant z' pour inconnue. Connaissant z', on en déduit z par une quadrature. Il y a toutefois lieu d'observer que la dernière équation ne satisfait aux conditions de continuité qui ont été admises précédemment que dans un intervalles où u_1 ne s'annule pas.

Plus généralement, si l'on connaît $p < n$ solutions indépendantes de l'équation linéaire et homogène d'ordre n, on peut abaisser son ordre de p unités.

Montrons d'abord que, si $u_1, u_2, \ldots u_p$ sont ces p solutions indépendantes, les $p - 1$ solutions

$$\left(\frac{u_2}{u_1}\right)', \quad \left(\frac{u_3}{u_1}\right)', \ldots \quad \left(\frac{u_p}{u_1}\right)'$$

qu'on en déduit pour l'équation en z' qui précède, sont aussi linéairement indépendantes. En effet, si ces solutions étaient liées par une relation linéaire à coefficients constants α, l'intégration de cette relation donnerait immédiatement

$$\alpha_2\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + \alpha_3\left(\frac{u_3}{u_1}\right) + \cdots + \alpha_p\left(\frac{u_p}{u_1}\right) = -\alpha_1,$$

d'où $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$, et les solutions $u_1, \ldots u_p$ ne seraient pas indépendantes.

Ce premier point établi, il s'ensuit que les $p - 1$ solutions de l'équation en z sont autres que 0. Par l'application du théorème précédent, an peut abaisser son ordre d'une unité et l'on connaîtra $p - 2$ solutions indépendantes de la nouvelle équation d'ordre $n - 2$. On continuera ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive à une équation d'ordre $n - p$.

Si l'on connaît $n-1$ solutions indépendantes d'une équation linéaire d'ordre n avec ou sans grand membre, l'intégration se ramène à des quadratures.

En effet, l'intégration de l'équation sans second membre revient à celle d'une équation du premier ordre, donc à des quadratures. Ceci fait, l'intégration de l'équation complète revient à n nouvelles quadratures.

Ainsi, par exemple, l'*équation du second membre*

$$y'' + X_1 y' + X_2 y = 0,$$

s'intègre par quadrature dès qu'on en connaît une intégrale particulière u_1. Faisons les substitutions

$$y = u_1 z, \qquad y' = u_1 z' + u_1' z, \qquad y'' = u_1 z'' + 2u_1' z' + u_1'' z\,;$$

il vient

$$u_1 z'' + (2u_1' + X u_1) z' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{z''}{z'} = -\frac{2u_1'}{u_1} - X_1,$$

$$z' = \frac{1}{u_1^2} e^{-\int X_1 dx}, \qquad z = \int \frac{dx}{u_1^2} e^{-\int X_1 dx}.$$

L'intégrale générale, $y = u_1 z$ sera

$$y = u_1 \int \frac{dx}{u_1^2} e^{-\int X_1 dx}.$$

En particulier, X_1 étant nul, l'intégrale de l'équation $y'' + X_2 y = 0$ sera

$$y = C u_1 \int \frac{dx}{u_1^2}.$$

§ 3. Solutions communes à deux équations linéaires et homogènes Méthode générale d'abaissement

166. Division symbolique. — *Étant donnés deux polynomes symboliques d'ordres m et n ($m \geq n$)*

$$A(y) = A_0 y^{(m)} + A_1 y^{(m-1)} + \ldots, \qquad B(y) = B_0 y^{(n)} + B_1 y^{(n-1)} + \ldots,$$

$A_0, A_1, \ldots B_0, B_1, \ldots$ *désignant des fonctions connues de* x, *il est toujours possible de déterminer deux nouveaux polynomes symboliques* Q *et* R *tels qu'on ait, quel que soit* y.

$$A(y) = Q[B(y)] + R(y),$$

Q *étant d'ordre* $m - n$ *et* R *d'ordre* $< n$. *De plus, cette détermination n'est possible que d'une seule manière.*

Cette opération peut s'appeler la *division* de A par B ; Q est le *quotient*, R le *reste*. Si R est identiquement nul, on dira que A est *divisible* par B.

Pour établir ce théorème, mettons la seconde équation de l'énoncé sous la forme

$$y_n = \frac{1}{B_0}(B - B_1 y^{n-1} - B_2 y^{n-2} - \cdots).$$

Dérivons-la $m - n$ fois de suite et remplaçons chaque fois dans le second membre $y^n, y^{n+1}, \ldots y^{m-1}$ par leurs valeurs déjà trouvées ; nous obtiendrons $y^n, y^{n+1}, \ldots y^m$ en fonction linéaire de $B, B', \ldots B^{m-n}$ et de $y, y', \ldots y^{n-1}$. Portons ces valeurs dans le premier polynome $A(y)$: il viendra

$$A(y) = Q(B) + R(y),$$

$Q(B)$ désignant un polynome symbolique en $B, B', \ldots B^{m-n}$ et R un polynome symbolique en $y, y, \ldots y^{n-1}$. C'est la relation qu'il fallait établir.

Sous les conditions énoncées, les polynomes Q *et* R *ne peuvent être déterminés que d'une seule manière.* En effet, soient Q_1 et R_1 deux autres polynomes satisfaisant aux mêmes conditions. On aura, quel que soit y,

$$Q[B(y)] - Q_1[B(y)] = R_1(y) - R(y).$$

Il résulte de là que l'expression linéaire (d'ordre $n - 1$) $R_1(y) - R(y)$ est annulée par l'intégrale générale de l'équation (d'ordre n) $B(y) = 0$, donc par des valeurs arbitraires de $y, y, \ldots y^{n-1}$. Donc tous les coefficients de cette expression sont nuls et l'on a identiquement $R_1 = R$.

La relation se réduit alors à $Q[B(y)] = Q_1[B(y)$. Celle-ci ayant lieu $B(y)$ restant arbitraire, on a identiquement $Q = Q_1$.

167. Solutions communes à deux équations. — *Les solutions communes aux deux équations* $A(y) = 0$ *et* $B(y) = 0$ *d'ordres* m *et* n *respectivement* ($m \geq n$), *sont celles d'une équation linéaire et sans second membre d'ordre* $\leq n$, *que l'on peut former par un calcul analogue à celui du plus grand commun diviseur de deux polynomes algébriques.*

En effet, divisons A par B et considérons l'identité

$$A(y) = Q[B(y)] + R(y).$$

On en conclut que les équations $A = 0$ et $B = 0$ d'une part, les équations $B = 0$ et $R = 0$ d'autre part, ont les mêmes intégrales communes.

Si $A = 0$ admet toutes les intégrales de $B = 0$, il faut donc que R soit identiquement nul (ou A divisible par B), sinon R, qui est d'ordre $< n$, ne pourrait être annulé par l'intégrale générale de l'équation $B = 0$, qui est d'ordre n. Réciproquement, si R est identiquement nul, les solutions communes seront données par l'intégrale générale de $B = 0$.

Si R n'est pas identiquement nul, nous sommes ramenés à chercher les intégrales communes à B et à R. Nous divisons B par R, ce qui fournit un nouveau reste R_1 et ainsi de suite. Comme les ordres des restes vont en décroissant, l'opération ne peut se poursuivre indéfiniment ; on arrivera donc à un premier reste R_n divisant exactement le précédent et, par suite, tous les autres. Ce reste R_n est le polynome symbolique de l'ordre le plus élevé qui divise à la fois A et B, il peut s'appeler *le plus grand commun diviseur* de A et de B. Les solutions communes aux deux équations $A = 0$ et $B = 0$ sont fournies par l'intégrale de $R_n = 0$.

Les deux équations $A = 0$ et $B = 0$ ont toujours $y = 0$ comme intégrale commune, en d'autres termes, les deux polynomes A et B sont toujours divisibles par y. S'il n'ont pas d'autre diviseur commun, on peut dire qu'ils sont *premiers entre eux*. Dans ce cas, les deux équations $A = 0$ et $B = 0$ n'ont pas d'autre solution commune que $y = 0$.

168. Théorème général sur l'abaissement de l'ordre des équations linéaires. — *Si l'on connaît* $p (p < n)$ *solutions indé-*

pendantes de l'équation d'ordre n, linéaire sans second membre, l'intégration se ramène à celle d'une équation linéaire sans second membre d'ordre $n - p$ et à $p(n - p)$ quadratures distinctes

Soit $f(y) = 0$ cette équation d'ordre n ; désignons par u_1, $u_2, \dots u_p$ les p intégrales connues et formons l'équation différentielle d'ordre p

$$\varphi(y) = W(u_1, u_2, \dots u_p, y) = 0$$

qui admet ce système fondamental d'intégrales et qui a pour intégrale générale $C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_p u_p$.

Puisque $f(y) = 0$ admet les intégrales de $\varphi(y) = 0$, le polynome f est divisible par φ (n° 167) et si l'on désigne par $Q(\varphi)$ un polynome de degré $n - p$, qui s'obtient par la division, on a l'identité

$$f(y) = Q[\varphi(y)].$$

L'équation $f(y) = 0$ se décompose donc en deux autres :

$$\varphi(y) = z, \qquad Q(z) = 0.$$

La second est une équation linéaire sans second membre d'ordre $n - p$, qui détermine z avec $n - p$ constantes arbitraires. La première est une équation linéaire d'ordre p, avec second membre, mais on connaît l'intégrale générale de l'équation sans second membre, cette équation détermine donc y par p quadratures, quand z est connu. Toutefois, comme z entre en facteur dans chacune des p fonctions à intégrer et que z est linéaire par rapport $n - p$ constantes arbitraires, chaque intégrale se décompose en $n - p$ autres multipliées par ces constantes et qui doivent, par conséquent, se déterminer séparément. Il y aura donc en tout $p(n - p)$ quadratures distinctes à effectuer.

Remarques. — I. Si l'on connaît $n - 1$ solutions indépendantes de l'équation sans second membre d'ordre n, l'ordre $n - p$ se réduit à 1 et l'intégration se fait par des quadratures, résultat connu (n° 165).

II. Si l'on connaît $p (p < n)$ solutions *indépendantes* de l'équation sans second membre d'ordre n, l'intégration de

l'équation complète se ramène à celle d'une équation sans second membre d'ordre $n - p$ et à $p(n - p) + n$ quadratures. En effet, il reste n quadratures à faire quand on a intégré l'équation sans second membre.

III. Les nombres de quadratures dont il s'agit dans ces théorèmes sont relatifs aux équations de la forme la plus générale. Si l'on considère des équations de forme spéciale, par exemple des équations où X_1 est nul, certaines de ces quadratures sont immédiates et leur nombre peut se réduire. Nous l'avons déjà observé pour l'équation du second ordre (n° 165).

§ 4. Propriétés des wronskiens Leur rôle dans l'intégration de l'équation linéaire

Les propriétés des équations linéaires sont intimement liées à celles des wronskiens dont la définition a été donnée au n° 159. Nous allons reprendre l'étude de ces déterminants. Cela nous permettra de préciser la plupart des propriétss rencontrées dans les paragraphes précédents et d'en découvrir de nouvelles.

159. Dérivation d'un wronskien. — *Pour dériver un wronskien*

$$W(u_1, u_2, \dots u_n) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

il suffit de remplacer les éléments de la dernière ligne par leurs dérivées.

C'est un cas particulier de la règle pour dériver un déterminant. Voici cette règle : Si les éléments ne sont variables que dans une seule ligne et qu'on développe le déterminant suivant les éléments de cette ligne, on voit de suite que la dérivée du déterminant s'obtient en remplaçant les éléments de cette ligne par leurs dérivées. Si tous les éléments varient, on applique la règle de dérivation des fonctions composées : la dérivée du déterminant est la somme des déterminants

obtenus en remplaçant les éléments d'une seule ligne à la fois, la première, puis la seconde, etc. par leurs dérivées. Dans le cas du wronskien, tous ces déterminants sont nuls comme ayant deux lignes égales, sauf le dernier.

170. Théorème. — *Si le wronskien $W(u_1, u_2, \dots u_n)$ est identiquement nul dans un intervalle, et que les wronskiens d'ordre $n-1$ obtenus en supprimant l'une quelconque des fonctions u ne s'annulent pas simultanément en un même point, les fonctions u sont liées, dans cet intervalle, par une relation linéaire à coefficients constants (non tous nuls).*

Considérons d'abord un intervalle dans lequel l'un des déterminants d'ordre $n-1$, par exemple $W(u_1, u_2, \dots u_{n-1})$ ne s'annule pas. Dans ce cas u_n est une solution de l'équation

$$W(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, y) = 0,$$

qui est linéaire et homogène, d'ordre $n-1$, et dans laquelle le coefficient de y_{n-1} est le wronskien supposé différent de 0. Cette équation satisfait aux conditions de continuité admises au paragraphe précédent, elle admet le système fondamental de solutions $u_1, u_2, \dots u_{n-1}$, elle a donc pour intégrale générale $y = C_1 u_1 + \dots + C_{n-1} u_{n-1}$. Mais u_n en est une solution particulière, donc

(1) $$u_n = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_{n-1} u_{n-1}.$$

Supposons que $W(u_1, u_2, \dots u_{n-1})$ s'annule en un point x_0 bornant l'intervalle précédent, mais qu'un autre wronskien $W(u_2, u_3, \dots u_n)$ ne s'annule pas en ce point. Je dis que la relation précédente subsiste de part et d'autre du point x_0. En effet, dans l'intervalle où $W(u_2, u_3, \dots u_n)$ ne s'annule pas, on a, par le raisonnement qui précède,

(2) $$u_1 = \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 + \dots + \beta_n u_n.$$

Les deux relations (1) et (2) subsistent donc dans un certain intervalle commun. Ceci exige qu'elles se confondent, sinon, en remplaçant dans (1) u_1 par sa valeur (2), on obtiendrait une relation entre $u_2, u_3, \dots u_n$ et le wronskien correspondant d'ordre $n-1$ serait identiquement nul, contrairement à l'hypothèse que nous venons de faire.

On voit ainsi que la relation (1) subsiste tant que l'on ne passe pas par une valeur de x qui annule à la fois tous les wronskiens d'ordre $n-1$.

REMARQUE. — Si tous les wronskiens d'ordre $n-1$ s'annulaient simultanément en un point x_0, la relation linéaire qui lie les fonctions u pourrait changer de forme de part et d'autre de ce point. Soit, par exemple,

$$u_1 = x^3, \qquad u_2 = |x^3|.$$

On a identiquement $W(u_1, u_2) = 0$, mais u_1 et u_2 s'annulent tous deux pour $x = 0$. On a $u_1 + u_2 = 0$ à gauche, mais $u_1 - u_2 = 0$ à droite du point $x = 0$.

Toutefois cette anomalie ne peut se présenter si les fonctions u sont *régulières* (ou *analytiques*), c'est-à-dire développables par la formule illimitée de Taylor aux environs de chaque point.

En effet, si une relation de la forme (1) a lieu dans un intervalle, elle subiste certainement dans tout intervalle contenant le précédent et dans lequel les fonctions u sont régulières. Pour nous en assurer, observons que, dans le cas contraire, on pourrait assigner un point *régulier* x_0, tel que la relation (1) ait lieu d'un côté et pas de l'autre de ce point. Substituons aux fonctions u leurs développements convergents suivant les puissances de $x - x_0$, les deux membres de la relation (1) seront identiques d'un côté de x_0, donc composés des mêmes termes, et, par conséquent, l'identité subsiste de part et d'autre de ce point.

171. Lemme. — *Si les deux équations linéaires sans second membre :*

$$y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \dots + X_n y = 0, \qquad y^{(n)} + \xi_1 y^{(n-1)} + \dots + \xi_n y = 0,$$

ont la même intégrale générale, elles sont identiques terme pour terme.

En effet, leur différence

$$(X_1 - \xi_1) y^{(n-1)} + (X_2 - \xi_2) y^{(n-2)} + \dots + (X_n - \xi_n) y = 0$$

est aussi vérifiée par cette intégrale générale, donc par des valeurs arbitraires de $y, y', \dots y^{(n-1)}$, ce qui exige qu'on ait $X_1 = \xi_1, X_2 = \xi_2, \dots$

Le théorème précédent permet de montrer facilement que le premier membre de l'équation linéaire, ramené à la forme

$$f(y) = y^n + X_1 y^{n-1} + \ldots + X_n y,$$

s'exprime de différentes manières par des wronskiens, quand on connaît n intégrales, linéairement indépendantes, $u_1, u_2, \ldots u_n$, où l'intégrale générale de l'équation $f(y) = 0$. C'est ce que nous allons faire.

172. Première expression de $f(y)$ par des wronskiens. — Formons l'équation linéaire d'ordre n

$$W(u_1, u_2, \ldots u_n, y) = 0\,;$$

elle revient à $f(y) = 0$, car, u_1, $u_2, \ldots$ u_n en étant n intégrales particulières, elle a la même intégrale générale. Pour réduire son premier membre à $f(y)$, il suffit donc de le diviser par le coefficient de y^n, d'où l'identité

$$(3) \qquad f(y) = \frac{W(u_1, u_2, \ldots u_n, y)}{W(u_1, u_2, \ldots u_n)}.$$

173. Formule de Liouville. Intégrale première de l'équation sans second membre. — Si l'on écrit $W(u_1, u_2, \ldots u_n, y)$ sous forme de déterminant, on remarque que, d'après la règle pour former la dérivée d'un wronskien (n° 169), le mineur relatif à y^{n-1} est

$$-W'(u_1, u_2, \ldots u_n).$$

Identifions donc les coefficients de y^{n-1} dans les deux membres de la relation (3); il vient, W étant le wronskien de $u_1, u_2, \ldots u_n$,

$$(4) \qquad \frac{W'}{W} = -X_1, \qquad \text{d'où} \qquad W = Ce^{-\int X_1 dx}.$$

Cette formule est due à *Liouville*. On en déduit une conséquence importante :

On obtient immédiatement une intégrale première de l'équation $f(y) = 0$ d'ordre n, si l'on en connait $(n-1)$ solutions indépendantes $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$.

Remplaçons, en effet, y par l'intégrale générale $C_1u_1 + C_2u_2 + \dots C_nu_n$ dans le wronskien

$$W(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, y)\,;$$

il vient, par la formule de Liouville,

$$W(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, y) = C_n W = Ce^{-\int X\,dx}.$$

Donc l'équation différentielle d'ordre $n-1$ avec second membre

$$(5) \qquad W(u_1, u_2, \dots u_{n-1}, y) = Ce^{-\int X\,dx}$$

est vérifiée par l'intégrale générale de $f(y) = 0$. *C'est donc une intégrale première de $f(y) = 0$* et l'intégration s'achève par des quadratures, car on connaît l'intégrale de l'équation sans second membre $W(u_1, \dots u_{n-1}, y) = 0$.

174. Seconde expression de $f(y)$ par des wronskiens. — Multiplicateurs. — Désignons, comme au n° précédent, par W le wronskien $W(u_1, u_2, \dots u_n)$; par $W_i(y)$ le même wronskien dans lequel une des fonctions u seulement, la fonction u_i, a été remplacée par y. Formons l'équation linéaire d'ordre n (D désignant une dérivée)

$$(6) \qquad D.\frac{W_i(y)}{W} = 0,$$

cette équation admet les n intégrales particulières $u_1, u_2, \dots u_n$, car le rapport à dériver est égal à 1 si $y = u_i$, et à 0 si y est égal à une autre fonction u. Donc, pour réduire le premier membre de cette équation à $f(y)$, il suffit de le diviser par le coefficient de y^n.

Soient, en général, ω_i^k le mineur de W relatif à l'élément u_i^k, ω_i le mineur relatif à u_i ; on aura

$$W_i(y) = \omega_i^{n-1}y^{n-1} + \omega_i^{n-2}y^{n-2} + \dots + \omega_i y.$$

Donc le coefficient de y_n dans l'équation (6) est $\omega_i^{n-1} : W$. On en conclut que l'on a, pour $i = 1, 2, \dots n$, l'identité

$$(7) \quad D.\frac{W_i(y)}{W} = D.\frac{\omega_i^{n-1}y^{n-1} + \omega_i^{n-2}y^{n-2} + \dots + \omega_i y}{W} = \frac{\omega_i^{n-1}}{W}f(y).$$

Il résulte de là que si l'on multiplie l'équation $f(y)=0$ par l'une des n quantités $\omega_i^{n-1} : W (i=1, 2,\dots n)$, on transforme son premier membre dans une dérivée exacte. Ces facteurs sont des *multiplicateurs* de l'équation et nous ferons la théorie de ces multiplicateurs au paragraphe suivant.

175. Intégration de l'équation linéaire avec second membre. — *L'intégration de l'équation linéaire complète d'ordre n se ramène à celle de l'équation sans second membre et à n quadratures.*

Nous avons obtenu ce résultat précédemment par la méthode de Lagrange. Il s'obtient immédiatement en se reportant aux formules du n° précédent. Soit l'équation $f(y)=X$. Multiplions-la par le multiplicateur $\omega_i^{n-1} : W$. Il vient, par l'identité (7) de ce numéro

$$D\frac{\omega_i^{n-1}y^{n-1}+\omega_i^{n-2}y^{n-2}+\dots+\omega_i y}{W}=\frac{\omega_i^{n-1}}{W}X,$$

et, en intégrant,

$$\omega_i^{n-1}y^{n-1}+\omega_i^{n-2}y^{n-2}+\dots+\omega_i y=W\int\frac{\omega_i^{n-1}}{W}X\,dx.$$

Multiplions cette relation par u_i et sommons pour $i=1,2,\dots n$. Comme les mineurs ω_i^k $(i=1, 2,\dots n)$ sont ceux de la $(k+1)^{me}$ ligne du déterminant W, le coefficient de y sera W, ceux de y' y''... seront nuls. Il viendra donc, en supprimant le facteur commun W qui n'est pas nul,

$$(8)\qquad y=\sum_{i=1}^{n}u_i\int\frac{\omega_i^{n-1}}{W}X\,dx.$$

C'est, sous forme explicite, la formule générale d'intégration de l'équation avec second membre.

Si, au lieu de multiplier les équations par $u_1, u_2,\dots u_n$ avant de les ajouter, on les avait multipliées par $u_1^k, u_2^k,\dots u_n^k$, on aurait obtenu, pour $k=1, 2,\dots n-1$,

$$y^k=\sum_{i=1}^{n}u_i^k\int\frac{\omega_i^{n-1}}{W}X\,dx.$$

§ 5. Multiplicateurs des équations linéaires

176. Multiplicateur. — Considérons l'expression symbolique

(1) $$f(y) = y^{n} + X_1 y^{n-1} + \dots + X_n y.$$

Un *multiplicateur de* $f(y)$ ou un *multiplicateur de l'équation* $f(y) = X$, est un facteur μ, fonction de x seul, tel que le produit $\mu f(y)$ soit la dérivée d'une fonction de x, y, y',... y^{n-1} et cela quel que soit y.

Il existe toujours des multiplicateurs et ce sont les intégrales d'une équation linéaire sans second membre d'ordre n.

En effet, considérons l'intégrale indéfinie

$$\int \mu f(y)\,dx = \int \mu(y^{n} + X_1 y^{n-1} + \dots + X_n y)\,dx.$$

Transformons-la par intégration par parties de manière à ne plus avoir de dérivée de y sous le signe $\int$. On a

$$\int \mu X_{n-1} y'\,dx = \mu X_{n-1} y - \int (\mu X_{n-1})'\,dx.$$

$$\int \mu X_{n-2} y''\,dx = \mu X_{n-2} y' - (\mu X_{n-2})' y + \int (\mu X_{n-2})'' y\,dx.$$

. . . .

Par la substitution de ces valeurs, il vient, Ω désignant la somme des termes intégrés,

(2) $$\left\{ \begin{aligned} &\int \mu f(y)\,dx = \Omega + \int y[\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \dots + (-1)^n \mu^{n}]\,dx.\\ &\Omega = \mu y^{n-1} + [\mu X_1 - \mu'] y^{n-2} + \dots \end{aligned} \right.$$

Donc, pour que μ soit un multiplicateur, il suffit que μ vérifie l'équation linéaire d'ordre n

(3) $$\mu^{n} - (\mu X_1)^{n-1} + \dots + (-1)^n \mu X_n = 0.$$

Réciproquement, tout multiplicateur doit vérifier cette équation, sinon, comme on le voit en dérivant l'équation (2), l'expression $y[\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \dots]$, qui est encore sous le signe $\int$ au second membre, serait la dérivée d'une fonction de x, y, y',... ce qui impossible, car elle ne contient pas de dérivée de y.

177. Équation adjointe. — L'équation des multiplicateurs ou l'équation (3) s'appelle l'*équation adjointe* de $f(y) = 0$. Il existe une complète réciprocité entre ces deux équations. *L'équation $f(y) = 0$ est réciproquement l'adjointe de l'équation* (3), *c'est-à-dire l'équation de ses multiplicateurs.*

En effet, si y est une intégrale de $f(y) = 0$, la relation (2) devient

$$\int y[\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \dots]\, dx = \Omega,$$

où Ω est une fonction explicite de μ, μ',... Donc y est un multiplicateur de $\mu X_n - (\mu X_{n-1})' + \dots$, ce qui prouve la proposition.

178. Théorème. — *Les intégrations complètes de deux équations adjointes sont deux problèmes complètement équivalents.*

En effet, supposons qu'on connaisse n solutions indépendantes u_1, u_2,... u_n de l'équation $f(y) = 0$; on obtient n multiplicateurs, donc n solutions de l'équation adjointe, par les formules (n° 174)

$$\mu_1 = \frac{w_1^{n-1}}{W}, \qquad \mu_2 = \frac{w_2^{n-1}}{W}, \dots \qquad \mu_n = \frac{w_n^{n-1}}{W}.$$

Il reste maintenant à montrer que ces multiplicateurs sont *linéairement indépendants*. Supposons, par impossible, que ces multiplicateurs ne soient pas indépendants ; on aura une identité de la forme $\Sigma\alpha_i w_i^{n-1} = 0$ où les α sont des constantes non toutes nulles. Ajoutons alors toutes les identités (7) du n° 174 respectivement multipliées par α_i ; il vient, quel que soit y,

$$D = \frac{y^{(n-1)}\Sigma\alpha_i w_i^{n-1} + \dots + y\Sigma\alpha_i w_i}{W} = 0,$$

ce qui ne peut subsister que si toutes les sommes Σ sont nulles. On aurait donc, pour des valeurs non toutes nulles des α, le système d'équations

$$\Sigma\alpha_i w_i = 0, \qquad \Sigma\alpha_i w_i' = 0, \dots \qquad \Sigma\alpha_i w_i^{n-1} = 0,$$

ce qui est impossible, car le déterminant des quantités w, qui

est l'adjoint de W et est égal à W^{n-1}, n'est pas nul (W ne l'étant pas).

179. Théorème. — *Si l'on connaît p ($p < n$) multiplicateurs linéairement indépendants d'une équation linéaire d'ordre n, avec ou sans second membre, on peut abaisser l'ordre de l'équation de p unités sans que l'équation cesse d'être linéaire.*

Considérons une équation d'ordre n.

$$(4) \qquad y^{n} + X_1 y^{n-1} + \dots + X_n y = X.$$

Multiplions-la par un multiplicateur μ_i et intégrons. Le premier membre s'intègre exactement et l'on obtient une intégrale première de cette équation, qui sera de la forme

$$(5) \qquad a_i y^{n-1} + b_i y^{n-2} + c_i y^{n-3} + \dots = \int \mu_i X \, dx.$$

Le premier membre de (5) n'est autre chose que l'expression Ω du n° 175. Les lettres a_i, b_i, c_i,... sont des fonctions connues de x, ayant pour valeurs, d'après la forme (2) de ce numéro,

$$a_i = \mu_i, \qquad b_i = \mu_i X_1 - \mu'_i, \qquad c_i = \mu_i X_2 - (\mu_i X_2)' + \mu''_i, \dots$$

Si l'on connaît p multiplicateurs μ_1, μ_2,... μ_p, on obtient ainsi p intégrales premières, comprises dans l'équation (5) pour $i = 1, 2, \dots p$. Ces intégrales premières sont distinctes, c'est-à-dire qu'elles forment un système d'équations résoluble par rapport à y^{n-1}, y^{n-2}, y^{n-p}. En effet, le déterminant des coefficients de ces inconnues dans ce système d'équations est

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_1 X_1 - \mu'_1 & \dots \\ \mu_2 & \mu_2 X_1 - \mu'_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu'_1 & \mu''_1 & \dots \\ \mu_2 & \mu'_2 & \mu''_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

C'est un wronskien qui ne s'annule pas, puisque μ_1, μ_2,... μ_p sont, par hypothèse, linéairement indépendants.

En résolvant ce système par rapport à y^{n-p}, on obtient une équation linéaire d'ordre $n - p$ pour déterminer y. Le théorème est ainsi établi.

Remarque. — Le théorème précédent fournit une nouvelle démonstration de celui du n° 168 relativement à l'abaissement

de l'ordre d'une équation linéaire sans second membre d'ordre n, dont on connaît p intégrales linéairement indépendantes. Ces p intégrales sont des multiplicateurs de l'équation adjointe ; l'ordre de celle-ci peut donc s'abaisser de p unités. Ceci fait, l'intégration de l'adjointe et, par conséquent, l'intégration de l'équation proposée (n° 178) ne dépendent plus que de l'intégration d'une équation d'ordre $n - p$.

§ 6. Intégration des équations linéaires à coefficients constants et sans second membre

180. Caractère algébrique du problème. — L'intégration des équations à coefficients constants avec ou sans second membre dépend étroitement de deux problèmes d'algèbre : 1° La détermination des racines d'un polynome ; 2° la décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples. Pour mettre cette dépendance en pleine lumière, il importe de définir et d'étudier les symboles d'opération avec le signe de dérivation D.

181. Opérations définies par des polynomes en D. Sommes et produits d'opérations. — Soient a_1, a_2,... des coefficients constants, D le signe de dérivation par rapport à x. Posons

$$(1) \qquad f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^n + a_1\mathrm{D}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathrm{D} + a_n.$$

L'expression $f(\mathrm{D})$ est un symbole d'opération, dont le sens s'interprète immédiatement en convenant que si y désigne une fonction de x, on a

$$f(\mathrm{D})y = \mathrm{D}^n y + a_1\mathrm{D}^{n-1}y + \ldots + a_n y.$$

On remarquera que, dans le cas particulier où $f(\mathrm{D}) = 1$, on a $f(\mathrm{D})y = y$. Donc, dans ce cas, $f(\mathrm{D})$ désigne une *opération d'effet nul.*

Les symboles opératoires à coefficients constants tels que (1), jouissent de propriétés qui les rapprochent des polynomes algébriques.

1° Sommes d'opérations. — En premier lieu, si $f(\mathrm{D})$ et $f_1(\mathrm{D})$ sont deux polynomes symboliques et qu'on représente par

$f(\mathrm{D}) + f_1(\mathrm{D})$ leur somme effectuée, on a, par les propriétés des dérivées,

$$f(\mathrm{D})y + f_1(\mathrm{D})y = [f(\mathrm{D}) + f_1(\mathrm{D})]y.$$

Donc l'opération $f(\mathrm{D}) + f_1(\mathrm{D})$ peut s'appeler la *somme des opérations* $f(\mathrm{D})$ et $f_1(\mathrm{D})$ et les sommes ainsi définies jouissent des propriétés des sommes algébriques. En particulier, l'opération $f(\mathrm{D})$ est la somme des opérations définies par chacun de ses termes.

2° Produits d'opérations. — Considérons d'abord un certain nombre de symboles linéaires $\mathrm{D} + a$, $\mathrm{D} + b$,... $\mathrm{D} + l$. Nous pouvons définir l'opération

$$(2) \qquad (\mathrm{D} + l) \ldots (\mathrm{D} + b)\,(\mathrm{D} + a)$$

en convenant qu'on opère d'abord avec le facteur $(\mathrm{D} + a)$, puis sur le résultat avec $(\mathrm{D} + b)$ et ainsi de suite. Or, en effectuant ces opérations, on constate immédiatement qu'on obtient le même résultat que si l'on avait exécuté l'opération unique, définie par le produit algébrique $(\mathrm{D} + l) \ldots (\mathrm{D} + a)$ préalablement effectué.

L'opération (2) peut donc s'appeler le *produit* des opérations définies par chaque facteur et ce produit est indépendant de l'ordre des facteurs. Si le produit se compose de m facteurs égaux $\mathrm{D} + a$, on le représentera donc par $(\mathrm{D} + a)^m$ comme en algèbre.

On définirait d'une manière analogue l'opération

$$f(\mathrm{D})\, f_1(\mathrm{D})\, f_2(\mathrm{D}) \ldots$$

composée de facteurs de degrés quelconques. On verrait que celle-ci aussi est indépendante de l'ordre des facteurs. Cette propriété résulte d'ailleurs de ce que chaque polynome $f(\mathrm{D})$ peut, par les règles de l'algèbre, se décomposer en facteurs linéaires, ce qui ramène au cas précédent. Nous reviendrons sur cette décomposition dans le n° suivant.

182. Décomposition des polynomes en facteurs et des fractions rationnelles en fractions simples. Formules symboliques qui s'en déduisent. — 1° Décomposition en fac-

TEURS. — Considérons l'équation algébrique de degré n (D étant considéré comme une quantité)

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Cette équation admet toujours n racines qui peuvent être égales ou distinctes, réelles ou imaginaires. Nous représenterons les racines différentes par r, s, t,... leurs ordres de multiplicité respectifs par λ, μ, ν,... Connaissant ces racines, on connaît aussi la décomposition de $f(D)$ en facteurs linéaires. On a

$$(3) \qquad f(D) = (D - r)^\lambda (D - s)^\mu (D - t)^\nu \ldots$$

Considérons maintenant $f(D)$ comme un symbole d'opération et rappelons-nous les résultats du n° précédent. Nous voyons que l'opération $f(D)$ peut se décomposer en une suite d'opérations consécutives, définies par un seul des symboles $D - r$, $D - s$,... et effectuées dans un ordre arbitraire.

2° DÉCOMPOSITION EN FRACTIONS SIMPLES. — La décomposition de $f(D)$ en facteurs se faisant par la formule (3), celle de $1 : f(D)$ en fractions simples se fera par la formule

$$(4) \quad \frac{1}{f(D)} = \frac{A_1}{D-r} + \frac{A_2}{(D-r)^2} + \ldots + \frac{A_\lambda}{(D-r)^\lambda} + \frac{B_1}{D-s} + \ldots$$

où A_1, A_2,... B_1,... sont des constantes réelles ou imaginaires, que nous avons appris à calculer (Tome I, n°s 95 et 96).

Représentons par

$$\frac{f(D)}{(D-r)}, \quad \frac{f(D)}{(D-r)^2}, \ldots \quad \frac{f(D)}{D-s}, \ldots$$

les *polynomes* respectivement obtenus en supprimant dans $f(D)$ un facteur $(D - r)$, deux facteurs $(D - r)$,... un facteur $(D - s)$, etc., et mettons l'identité (4) sous la forme

$$(5) \quad 1 = A_1 \frac{f(D)}{D-r} + A_2 \frac{f(D)}{(D-r)^2} + \ldots + A_\lambda \frac{f(D)}{(D-r)^\lambda} + B_1 \frac{f(D)}{D-s} + \ldots$$

Dans cette nouvelle relation, chaque terme du second membre est un polynome et peut être considéré comme le symbole d'une opération à effectuer. La formule (5) montre que la *somme* des opérations définies respectivement par chaque

terme du second membre, est une opération d'effet nul. Cette formule nous sera très utile.

183. Relation entre les symboles D et (D — r). — Soit r une constante et y une fonction de x ; on a

$$D.e^{-rx}y = e^{-rx}Dy - e^{-rx}ry = e^{-rx}(D-r)y.$$

Remplaçons, dans cette relation, y par $(D-r)y$; il vient

$$D.e^{-rx}(D-r)y = e^{-rx}(D-r)^2 y$$

et, en vertu de la relation précédente,

$$D^2.e^{-rx}y = e^{-rx}(D-r)^2 y.$$

Remplaçons de nouveau y par $(D-r)y$ et continuons ainsi de suite. Après λ opérations, nous obtiendrons

$$D^\lambda.e^{-rx}y = e^{-rx}(D-r)^\lambda y. \tag{6}$$

184. Équation linéaire à coefficients constants. Équation caractéristique. Équation simple. — Une équation linéaire à coefficients constants est de la forme

$$f(D)y = \varphi(x)$$

où l'on a posé, comme ci-dessus (n° 181), les coefficients a étant des constantes,

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Si $\varphi(x)$ n'est pas nul, l'équation est *complète* ou *avec second membre* ; si $\varphi(x)$ est nul, l'équation est *sans second membre*. On donne le nom d'*équation caractéristique* à l'équation algébrique

$$f(D) = 0.$$

Quand l'équation caractéristique n'a qu'une seule racine distincte, simple ou multiple, l'équation différentielle devient

$$(D-r)^\lambda y = \varphi(x)$$

et nous donnerons le nom d'***équation simple*** à une équation de cette forme.

185. Intégration des équations simples sans second membre. — Soit l'équation d'ordre λ

$$(7) \qquad (D - r)^{\lambda} y = 0.$$

Multiplions-la par e^{-rx}, qui n'est ni nul ni infini, puis transformons-la par la formule (6) ; elle devient

$$D^{\lambda} . e^{-rx} y = 0.$$

Donc l'intégration est immédiate, $e^{-rx} y$ est un polynome arbitraire de degré $\lambda - 1$. Soit $P_{\lambda-1}$ ce polynome ; il contient λ constantes arbitraires, qui sont ses coefficients :

$$P_{\lambda-1} = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{\lambda-1} x^{\lambda-1}.$$

L'intégrale générale de l'équation (7) sera

$$y = P_{\lambda-1} e^{rx}.$$

C'est bien la somme de λ intégrales particulières multipliées respectivement par des constantes C.

186. Intégration de l'équation linéaire à coefficients constants et sans second membre dans le cas général. — Cette équation est de la forme

$$(8) \qquad f(D) y = 0.$$

Son intégration revient à la résolution algébrique de l'équation caractéristique

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

ou, ce qui revient au même, à la décomposition de $f(D)$ en ses facteurs linéaires :

$$f(D) = (D - r)^{\lambda} (D - s)^{\mu} \ldots (D - t)^{\nu}.$$

L'intégrale générale est égale à la somme des intégrales générales de chacune des équations simples :

$$(9) \qquad (D - r)^{\lambda} y = 0, \qquad (D - s)^{\mu} y = 0, \ldots \qquad (D - t)^{\nu} y = 0.$$

et on peut l'écrire immédiatement. Ce sera, sauf une trans-

formation indiquée dans le numéro suivant s'il y a des racines imaginaires,

$$(10) \qquad y = P_{\lambda-1}e^{rx} + Q_{\mu-1}e^{sx} + \ldots + R_{\nu-1}e^{tx},$$

P, Q,... R désignant des polynomes en x de degrés marqués par l'indice et dont les coefficients sont les constantes arbitraires de l'intégrale.

Démonstration. — L'ordre des facteurs $(D-r)^\lambda$, $(D-s)^\mu$,... qui entrent dans $f(D)$ étant indifférent, l'équation $f(D)y=0$ peut s'écrire en faisant figurer à volonté l'un quelconque de ces facteurs immédiatement devant y. Donc les intégrales des équations (6) sont des solutions particulières de l'équation (8) et l'expression (10), qui est leur somme, est une intégrale plus générale de cette équation, mais, de plus, ce sera l'intégrale générale, car nous allons montrer que, réciproquement, toute intégrale de l'équation (8) est de la forme (10).

A cet effet, isolons successivement, dans $f(D)$, les divers facteurs $(D-r)$, $(D-r)^2$,... $(D-s)$,... L'équation $f(D)y=0$ s'écrira sous les formes

$$(D-r)\left[\frac{f(D)}{(D-r)}y\right]=0,\quad (D-r)^2\left[\frac{f(D)}{(D-r)^2}y\right]=0,\ldots\quad (D-s)\left[\frac{f(D)}{D-s}y\right]=0,\ldots$$

Chacune de ces équations devient une équation simple sans second membre en prenant la quantité entre crochets comme inconnue ; il vient, en les intégrant,

$$\frac{f(D)}{(D-r)}y = P_0e^{rx},\qquad \frac{f(D)}{(D-r)^2}y = P_1e^{rx},\ldots\qquad \frac{f(D)}{D-s}y = Q'e^{sx},\ldots$$

les polynomes P étant de degrés $<\lambda$, les polynomes Q de degrés $<\mu$,... Multiplions respectivement ces équations par les constantes A_1, A_2,... B_1... de la décomposition de $1 : f(D)$ en fractions simples et ajoutons-les. Il vient, par l'identité (5) établie au n° 182,

$$y = e^{rx}\Sigma AP + e^{sx}\Sigma BQ + \ldots$$

Comme ΣAQ, ΣBQ,... sont respectivement des polynomes de degré moindre que λ, moindre que μ,... cette expression est de la forme (10).

Remarque. — L'expression (10) renferme $\lambda + \mu + \ldots = n$ constantes arbitraires, qui sont les coefficients des polynomes P, Q,... On reconnaît ainsi, conformément aux théorèmes généraux, que l'intégrale générale de l'équation sans second membre est la somme de n intégrales particulières multipliées par des constantes arbitraires. Ces intégrales particulières sont donc linéairement indépendantes, sinon elles ne fourniraient pas l'intégrale générale. On en conclut que *si r, s,... sont des constantes différentes (réelles ou non), l'identité*

$$P_{\lambda-1}e^{rx} + Q_{\mu-1}e^{sx} + \ldots = 0$$

ne peut avoir lieu que si les polynomes P, Q,... *sont identiquement nuls* (*)

187. Cas des racines imaginaires. — Quand les racines $r, s, \ldots$ ne sont pas toutes réelles, l'intégrale trouvée contient des imaginaires, mais elle subsiste, car les règles de dérivation des exponentielles ne sont pas changées. On peut, par une transformation, lui restituer la forme réelle.

Nous supposons ici que $f(D)$ est un polynome à coefficients réels, de sorte que ses racines imaginaires sont conjuguées deux à deux. Soit $r = \alpha + \beta i$ et $s = \alpha - \beta i$ un couple de racines conjuguées de l'ordre λ de multiplicité. Les termes correspon-

(*) Il est facile de prouver directement ce théorème. Admettons, par impossible, que cette identité ait lieu pour les valeurs réelles de x, un coefficient au moins de chaque polynome n'étant pas nul. D'abord l'identité subsiste pour les valeurs imaginaires (car son premier membre est alors une somme de séries potentielles qui se détruisent). Soit r celle des quantités r, s,... qui a le plus grand module, ou l'une d'elles s'il y a plusieurs modules égaux. Remplaçons x par $x : r$ et faisons tendre x vers l'infini positif. Après cette substitution (qui n'altère pas nos hypothèses sur les polynomes P, Q,...), l'identité prend la forme

$$Pe^x + Qe^{\frac{s}{r}x} + \ldots = 0.$$

Mais les coefficients $\frac{s}{r}$,... diffèrent tous de 1 et ont tous des modules $\leqq 1$ par hypothèse, ce qui exige que *leurs parties réelles soient toutes* < 1. Donc, pour x infini positif, le premier terme Pe^x est d'ordre supérieur à tous les autres et l'identité est impossible.

dants de la formule (10) peuvent s'écrire, en désignant par P et Q deux polynomes arbitraires de degré $(\lambda - 1)$,

$$Pe^{rx} + Qe^{sx} = e^{\alpha x}(Pe^{\beta ix} + Qe^{-\beta ix}).$$

Remplaçons $e^{\beta ix}$ par $\cos \beta x + i \sin \beta x$, $e^{-\beta ix}$ par $\cos \beta x - i \sin \beta x$; l'ensemble des termes considérés se met sous la forme

$$e^{\alpha x}[(P + Q) \cos \beta x + i(P - Q) \sin \beta x]$$

ou plus simplement

(11) $$e^{\alpha x}[P_{\lambda-1} \cos \beta x + Q_{\lambda-1} \sin \beta x],$$

car on peut considérer $P + Q$ et $i(P - Q)$ comme deux polynomes réels arbitraires $P_{\lambda-1}$ et $Q_{\lambda-1}$ de degré $\lambda - 1$. Il suffit, en effet, pour cela, que les deux polynomes P et Q soient conjugués.

Les termes de l'intégrale qui correspondent aux racines conjuguées r et s s'écriront donc sous la forme (11) et l'on opérera de même pour les autres couples de racines conjuguées s'il y en a.

En particulier, si les racines conjuguées r et s sont simples, les termes correspondants de l'intégrale générale seront

(12) $$e^{\alpha x}[C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x]$$

ou, ce qui revient au même,

$$Ce^{\alpha x} \cos (\beta x + C'),$$

C et C′ désignant deux nouvelles constantes, liées aux premières par les relations $C_1 = C \cos C'$ et $C_2 = - C \sin C'$.

188. Exemples. — I. Les deux équations

$$(D^2 + 5D + 6)y = 0, \qquad (D^2 - 2D + 1)y = 0,$$

ont pour caractéristiques

$$(D + 2)(D + 3) = 0, \qquad (D - 1)^2 = 0,$$

et pour intégrales

$$y = Ce^{-2x} + C_1e^{-3x}, \qquad y = (C + C_1x)e^x.$$

II. Soit l'équation

$$(D^4 + 8D^2 + 16)y = 0.$$

L'équation caractéristique $(D^2 + 4)^2 = 0$ a les racines doubles imaginaires $\pm 2i$; l'intégrale générale sera

$$y = (C + C_1x)\cos 2x + (C_2 + C_3x)\sin 2x.$$

III. Soit l'équation

$$(D^4 + 4a^4)y = 0.$$

L'équation caractéristique

$$D^4 + 4a^4 = (D^2 + 2a^2)^2 - (2aD)^2 = 0$$

a les racines $\pm a(1 \pm i)$; l'intégrale générale sera

$$y = Ce^{ax}\cos(ax + C') + C_1e^{-ax}\cos(ax + C_1').$$

§ 7. Intégration des équations linéaires à coefficients constants avec second membre

189. Intégration des équations simples. — Soit l'équation simple

$$(1) \qquad (D - r)^\lambda y = \varphi(x).$$

Multiplions-la par e^{-rx} et transformons-la par la formule (6) du n° 183 ; elle devient

$$D^\lambda \cdot e^{-rx}y = e^{-rx}\varphi(x).$$

On en tire d'abord $e^{-rx}y$ par λ quadratures consécutives, et ensuite y par la formule

$$(2) \qquad y = e^{rx}\int\int\cdots\int e^{-rx}\varphi(x)\,dx^\lambda.$$

Cette expression est la somme d'une intégrale particulière de l'équation complète et de l'intégrale générale $P_{\lambda-1}e^{rx}$ de l'équation sans second membre. Pratiquement, pour calculer y, on peut effectuer les quadratures sans introduire de constante, ce qui fournit l'intégrale particulière, et ajouter ensuite l'intégrale de l'équation sans second membre.

Réduction de plusieurs quadratures successives a une intégrale définie. — Considérons l'équation différentielle

$$(3) \qquad D^\lambda u = \psi(x),$$

d'où

$$(4) \qquad u = \int\int\cdots\int\psi(x)\,dx^{\lambda}.$$

On vérifie directement qu'*on obtient une intégrale particulière par la formule*, déjà signalée (n° 164),

$$(5) \qquad u = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)\,!}\psi(t)\,dt,$$

où x_0 est une constante arbitraire.

En effet, si l'on dérive d'abord $(\lambda-1)$ fois de suite par la règle de Leibniz complétée (n° 20), le terme provenant de la variation de la limite supérieure est nul chaque fois (la fonction sous le signe $\int$ s'annulant à cette limite), et il suffit de dériver sous le signe, ce qui donne

$$D^{\lambda-1}u = \int_{x_0}^{x}\psi(t)\,dt.$$

Enfin, en dérivant une fois de plus, il vient $D^{\lambda}u = \psi(x)$.

Si l'on fait maintenant $\psi(x) = e^{-rx}\varphi(x)$, on trouve la solution particulière

$$\int\int\cdots\int e^{-rx}\varphi(x)\,dx^{\lambda} = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)\,!}e^{-rt}\varphi(t)\,dt.$$

On obtient donc une intégrale particulière de l'équation complète (1) par la formule pratique :

$$(6) \qquad y = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)\,!}e^{r(x-t)}\varphi(t)\,dt.$$

Représentation symbolique de l'intégrale. — Il sera commode de représenter l'intégrale de l'équation générale de l'équation

$$(D-r)^{\lambda}y = \varphi(x)$$

par le symbole

$$y = \frac{\varphi(x)}{(D-r)^{\lambda}}$$

qu'on obtient en résolvant l'équation par rapport à y comme si $(D-r)$ était une quantité. Nous allons voir l'utilité de cette convention dans le n° suivant.

190. Intégration des équations linéaires complètes à coefficients constants dans le cas général. — Comme l'intégrale de l'équation sans second membre est connue, cette intégration se ramène à des quadratures d'après un théorème général (n° 163).

Soit donc à intégrer l'équation

$$(7) \qquad f(D)\,y = \varphi(x).$$

Nous allons montrer que *le problème de réduire cette intégration à des quadratures revient à décomposer* $1 : f(D)$ *en une somme de fractions simples.*

Supposons, en effet, que l'on connaisse la décomposition de $f(D)$ en facteurs :

$$f(D) = (D - r)^{\lambda}\,(D - s)^{\mu} \ldots$$

et celle de $1 : f(D)$ en fractions simples :

$$\frac{1}{f(D)} = \frac{A_1}{D - r} + \frac{A_2}{(D - r)^2} + \cdots + \frac{A_\lambda}{(D - r)^\lambda} + \frac{B_1}{D - s} + \cdots$$

Isolons successivement dans $f(D)$ les divers facteurs $(D - r)$, $(D - r)^2, \ldots$ $(D - s)\ldots$ L'équation à intégrer s'écrira sous les diverses formes

$$(D - r)\left[\frac{f(D)}{(D - r)}\,y\right] = \varphi, \qquad (D - r)^2\left[\frac{f(D)}{(D - r)^2}\,y\right] = \varphi, \ldots$$

$$(D - s)\left[\frac{f(D)}{(D - s)}\,y\right] = \varphi, \ldots$$

Chacune de ces équations est une équation simple avec second membre quand on prend la quantité entre crochets comme inconnue. Il vient, en les intégrant et en utilisant la représentation symbolique indiquée à la fin du n° précédent,

$$\frac{f(D)}{D - r}\,y = \frac{\varphi}{D - r}, \quad \frac{f(D)}{(D - r)^2}\,y = \frac{\varphi}{(D - r)^2}, \ldots \frac{f(D)}{D - s}\,y = \frac{\varphi}{D - s}, \ldots$$

Multiplions respectivement ces équations par les constantes $A_1, A_2, \ldots$ $B_1, \ldots$ de la décomposition de $1 : f(D)$ en fractions simples et ajoutons, il vient, par l'identité (5) du n° 182,

$$(8) \quad y = \frac{A_1\varphi}{D - r} + \frac{A_2\varphi}{(D - r)_2} + \cdots + \frac{A_\lambda\varphi}{(D - r)^\lambda} + \frac{B_1\varphi}{D - s} + \cdots$$

Cette formule s'obtient, tout simplement, en remplaçant dans la relation

$$y = \frac{1}{f(D)}\,\varphi(x)$$

$1 : f(D)$ par son développement en une somme de fractions simples et c'est la formule de réduction de l'intégrale cherchée à des intégrales d'équations simples, donc à des quadratures.

D'après notre raisonnement, toute intégrale y rentre dans la formule précédente. Mais les constantes d'intégration restent arbitraires, car, en réunissant les termes qui renferment ces constantes, on forme l'intégrale générale de l'équation sans second membre.

Pratiquement, pour obtenir l'intégrale générale y, on remplacera chaque terme de la formule (8) par l'intégrale particulière correspondante fournie par la formule (6), puis on ajoutera l'intégrale de l'équation sans second membre.

Si les racines r, s,... ne sont pas toutes réelles, la solution sera, en apparence, compliquée de coefficients et d'exponentielles imaginaires, mais ces imaginaires disparaîtront d'elles-mêmes par l'addition des termes conjugués, ainsi que nous l'avons vérifié pour l'équation sans second membre.

Cas particulier. — *Si toutes les racines $f(D)$ sont simples*, la décomposition en fractions se fait par la formule connue (t. 1er, n° 97) et la formule d'intégration devient

$$y = \frac{\varphi(x)}{f(D)} = \frac{1}{f'(r)}\,\frac{\varphi}{D-r} + \frac{1}{f'(s)}\,\frac{\varphi}{D-s} + \cdots$$

Remplaçons chaque terme de cette formule par l'intégrale particulière (6) du n° 189 et ajoutons l'intégrale générale Y de l'équation sans second membre, nous obtenons l'intégrale

$$(9) \qquad y = Y + \int_{x_0}^{x} \left[\frac{e^{r(x-t)}}{f'(r)} + \frac{e^{s(x-t)}}{f'(s)} + \cdots \right] \varphi(t)\,dt.$$

Exemple. — Soit à intégrer l'équation

$$(D^2 + a^2)\,y = (D + ai)\,(D - ai)\,y = \varphi(x).$$

Les racines sont $r = ai$, $s = -ai$ et l'on a $f'(D) = 2D$; faisons $x_0 = 0$ dans la formule (9), elle nous donne

$$y = Y + \int_0^x \frac{e^{ai(x-t)} - e^{-ai(x-t)}}{2ai} \varphi(t)\, dt.$$

Remplaçons encore Y par sa valeur, nous obtenons l'intégrale

$$y = A \cos ax + B \sin ax \frac{1}{a} \int_0^x \varphi(t) \sin a(x-t)\, dt.$$

191. Intégration de l'équation complète par la détermination directe d'une intégrale particulière. — Quand on trouve facilement une intégrale particulière de l'équation complète

$$f(D)y = \varphi(x),$$

l'intégrale générale s'obtient le plus facilement en ajoutant à celle-là l'intégrale générale de l'équation sans second membre. Nous allons examiner les principales formes de $\varphi(x)$ pour lesquelles on trouve directement une intégrale particulière.

Premier cas. — *$\varphi(x)$ est un polynome P_k de degré k.* L'équation est donc de la forme

$$f(D)y = P_k.$$

Si $f(D)$ n'a pas de racine nulle, l'équation admet comme solution particulière un polynome déterminé de degré k; si $f(D)$ à λ racines nulles, l'équation admet une solution particulière de la forme $x^\lambda Q_k$ où Q_k est encore un polynome déterminé de degré k.

Ces polynomes peuvent s'obtenir par la méthode des coefficients indéterminés, ou par le procédé suivant, qui nous servira de démonstration.

En premier lieu, si $f(D)$ n'a pas de racine nulle, on peut développer $1 : f(D)$ suivant les puissances de D par la formule de Maclaurin. Arrêtons-nous après le terme d'ordre k; nous aurons, M désignant un polynome en D (t. 1er, n° 79),

$$\frac{1}{f(D)} = b_0 + b_1 D + \cdots + b_k D^k + D^{k+1} \frac{M}{f(D)},$$

d'où

$$1 = f(D)(b_0 + b_1 D + \cdots + b_k D^k) + MD^{k+1}.$$

Le second membre définit donc une opération d'effet nul ; effectuons-la sur P_k, en observant que $D^{k+1}P_k = 0$; il vient

$$f(D)\,[(b_0 + b_1 D + \cdots + b^k)P_k] = P_k.$$

Donc, *si* $f(D)$ *n'a pas de racine nulle, on obtient une solution particulière en faisant la somme des termes de degrés* $\leq k$ *dans le développement de* $1 : f(D)$ *suivant les puissances de* D, *et en effectuant sur* P_k *l'opération représentée par cette somme. Le résultat sera un polynome de degré* k.

En second lieu, si $f(D)$ a λ racines nulles, observons que l'on a $f(D) = D^\lambda f_1(D)$, mettons l'équation sous la forme

$$f_1(D)[D^\lambda y] = P_k$$

et prenons $D^\lambda y$ pour inconnue : nous sommes ramenés au cas précédent. Donc $D^\lambda y$ est un polynome de degré k, qui peut se calculer à l'aide du développement de $1 : f_1(D)$ par la formule de Maclaurin. Connaissant $D^\lambda y$, tirons-en une solution y par λ quadratures sans introduire de constante : cette solution sera de la forme $x^\lambda Q_k$.

Chaque fois que l'on connaît ou que l'on obtient facilement le développement de Maclaurin sur lequel repose le calcul précédent, cette méthode est la plus commode en pratique et, dans les cas simples, elle permet même d'écrire à première vue une solution de l'équation. Mais, si le développement en question ne s'obtient que par des calculs minutieux, il sera généralement plus expéditif d'employer la méthode des coefficients indéterminés. On substituera dans l'équation une expression de la forme indiquée en laissant indéterminés les coefficients du polynome Q_k. En identifiant les deux membres, on obtiendra un système d'équations linéaires déterminant tous les coefficients inconnus, car, comme aucun terme de la solution particulière cherchée n'entre dans l'intégrale de l'équation sans second membre, aucun des coefficients ne peut rester arbitraire.

DEUXIÈME CAS. — *Si* $\varphi(x)$ *est le produit d'un polynome par une exponentielle,* l'équation est de la forme

$$f(D)\,y = P_k e^{ax},$$

Ce cas se ramène au précédent par la substitution

$$y = e^{ax} z.$$

En effet, si l'on remplace r par $-a$ dans la formule (6) du nº 183, on en tire

$$D^{\lambda} e^{ax} z = e^{ax} (D + a)^{\lambda} z.$$

Si l'on applique cette formule pour chaque terme de $f(D)$, on en déduit la formule générale

$$(10) \qquad f(D)\, e^{ax} z = e^{ax} f(D + a)\, z.$$

Donc, après suppression du facteur commun e^{ax}, l'équation transformée sera

$$f(D + a)\, z = P_k.$$

Connaissant une solution particulière z, on en déduit une solution particulière y.

Troisième cas. — *Si $\varphi(x)$ est une somme de termes des types précédents*, donc si l'équation est de la forme

$$f(D) = P_k + Q_l e^{ax} + \dots,$$

on cherchera séparément des intégrales $u, v, \dots$ des diverses équations

$$f(D)\, u = P_k, \qquad f(D)\, v = Q_l e^{ax}, \dots$$

et, en faisant leur somme $u + v + \dots$, on aura une intégrale particulière de la proposée. On le constate par l'addition des équations précédentes.

Quatrième cas. — *Si l'équation est de l'une des formes suivantes :*

$$f(D)\, y = P_k e^{ax} \cos bx, \qquad f(D)\, z = P_k e^{ax} \sin bx,$$

on peut la ramener aux types précédents en remplaçant les lignes trigonométriques par des exponentielles imaginaires ; mais, si les données sont réelles, on obtiendra plus facilement une intégrale en prenant respectivement pour y et pour z la partie réelle et le coefficient de i dans une solution u de l'équation

$$f(D)\, u = P_k e^{(a+bi)x}$$

car cette équation se décompose dans les deux précédentes en posant $u = y + zi$.

192. Exemples. — Soient à intégrer les deux équations

$$(D^2 + 1)y = \cos x, \qquad (D^2 + 1)z = \sin x.$$

Nous intégrons donc $(D^2 + 1)u = e^{ix}$. Substituant $u = te^{ix}$, il vient

$$[(D + i)^2 + 1]t = 1, \qquad \text{d'où} \qquad (D + 2i)Dt = 1.$$

Le terme de degré 0 dans $1 : (D + 2i)$ est $1 : 2i$; on a donc

$$Dt = \frac{1}{2i}, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{x}{2i}, \qquad u = \frac{xe^{ix}}{2i}.$$

Les intégrales particulières cherchées y et z seront

$$y = \frac{x \sin x}{2}, \qquad z = -\frac{x \cos x}{2}.$$

193. Équations d'Euler réductibles à celles à coefficients constants. — Elles sont de la forme

$$(11) \qquad x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = \varphi(x),$$

et elles se ramènent aux coefficients constants en changeant de variable indépendante par la substitution

$$x = e^t, \qquad dx = e^t dt.$$

En effet, soit D le signe de dérivation par rapport à t ; ayons égard à la formule $D \,.\, e^{at}u = e^{at}(D + a)u$; il vient, de proche en proche,

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t} Dy, \qquad \frac{d^2 y}{d^2 x} = e^{-t} D(e^{-t} Dy) = e^{-2t} D(D - 1)y, \dots$$

c'est-à-dire

$$x \frac{dy}{dx} = Dy, \qquad x^2 \frac{d^2 y}{d^2 x} = D(D - 1)y, \dots$$

et, en général,

$$x_p \frac{d^p y}{dx^p} = D(D - 1)(D - 2) \dots (D - p + 1)y.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (11), elle se transforme en une autre à coefficients constants, que l'on peut écrire immédiatement.

Remarque. — Si l'on considérait l'équation plus générale

$$(px + q)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 (px + q)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n y = \varphi(x),$$

on la ramènerait à la précédente en prenant $px + q$ comme variable indépendante.

EXERCICES

1. Intégrer les équations suivantes (méthode du n° 190) :

$$(D^2 + D + 1)y = \sin 2x$$
$$(D^3 + 2D^2 + 1)y = x^2 \cos ax$$
$$(D^2 + 4)y = x \sin^2 x$$
$$(D + 1)y = e^{-x} + x^2$$
$$(D + c)^n y = \cos ax.$$

2. Réduire à des quadratures les intégrations des équations précédentes, après y avoir remplacé le second membre par une fonction quelconque $\varphi(x)$. Étudier en particulier les cas où $\varphi(x) = x^{-1}$, $\lg x$, etc.

3. Intégrer les équations linéaires

$$x(1 - x)y'' + \left(\frac{3}{2} - 2x\right)y' - \frac{y}{4} = 0,$$

$$(x^2 - 1)y'' + 2(x - 1)y' - 2y = \frac{2}{x - 1},$$

sachant que la première admet une solution particulière $y = x^n$ (n à déterminer) et que l'équation sans second membre correspondant à la seconde admet comme solution un polynome du premier degré à déterminer.

R. $n = -\frac{1}{2}$; le polynome est $x - 1$. Ces solutions connues, les équations s'abaissent au premier ordre.

4. Intégrer l'équation linéaire

$$y''' + 3\frac{1 - x}{x}y'' - \frac{6}{x}y' - 4y = 0,$$

sachant qu'elle se ramène à une équation à coefficients constants par une substitution $y = z : u$ où u est un polynome en x à déterminer.

R. $u = x$.

§ 8. Intégration par les séries Équations de Bessel et de Riccati

194. Fonction et équation de Bessel. — Soit n un nombre quelconque (non entier, s'il est négatif). Nous définirons la

fonction I_n *de Bessel* par la série potentielle, convergente pour toutes les valeurs de x,

$$(1) \qquad I_n = \sum_0^{\infty} a_p x^p \qquad \text{où} \qquad a_p = \frac{1}{p!\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+p)}$$

et nous conviendrons que, si $p = 0$, on a $0! = 1$, $a^0 = 1$.

Cette fonction vérifie une équation différentielle que nous allons former. On a

$$\frac{d}{dx} \cdot x^n I_n = \Sigma (n+p) a_p x^{n+p-1}$$

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} \frac{d}{dx} x^n I_n = \Sigma p(n+p)\, a_p x^{p-1} = \Sigma a_{p-1} x^{p-1} = I_n.$$

C'est l'équation cherchée, qui peut s'écrire, tous calculs faits

$$x \frac{d^2 I_n}{dx^2} + (1+n) \frac{dI_n}{dx} - I_n = 0.$$

Donc I_n est une intégrale particulière de l'équation

$$(2) \qquad x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1+n) \frac{dy}{dx} - y = 0,$$

que nous appellerons *équation de Bessel* (1).

195. Théorème. — *L'équation de Bessel ne change pas de forme par la substitution*

$$y = \frac{z}{x^n},$$

seulement n change de signe dans l'équation.

En dérivant cette formule, il vient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^n} \frac{dz}{dx} - \frac{nz}{x^{n+1}} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^n} \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{2n}{x^{n+1}} \frac{dz}{dx} + \frac{n(n+1)z}{x^{n+1}}$$

et, par la substitution de ces valeurs, l'équation de Bessel devient

$$(3) \qquad x \frac{d^2 z}{dx^2} + (1-n) \frac{dz}{dx} - z = 0.$$

(1) On prend souvent aussi comme forme canonique de l'équation de Bessel les équations (11) du n° 200 ou encore d'autres transformées que nous ne rencontrerons pas ici.

Remarques. — I. Si x est négatif, la substitution précédente peut être imaginaire, mais la substitution

$$y = \frac{z}{(-x)^n}$$

sera réelle et conduira à la même équation (3), car la nouvelle valeur de z ne diffère de la précédente que par un facteur constant. On peut donc toujours éviter l'introduction des imaginaires.

II. Il résulte du théorème précédent que, dans l'étude de l'équation de Bessel, il sera toujours permis de supposer n nul ou positif, car, si n était négatif, on le rendrait positif par la substitution précédente.

196. Intégration de l'équation de Bessel quand n n'est pas un nombre entier. — Dans ce cas, *l'intégrale générale s'exprime par les fonctions de Bessel.*

En effet, I_n est une première intégrale particulière de l'équation (2) ; I_{-n} est une intégrale particulière de l'équation (3), donc $I_{-n} : x^n$ est une seconde intégrale particulière de l'équation (2) et elle est évidemment indépendante de la première, parce qu'elle renferme des puissances fractionnaires. L'intégrale générale de l'équation (2) sera donc

$$(4) \qquad y = CI_n + C_1 \frac{I_{-n}}{x^n}.$$

Si x était négatif et qu'on voulût éviter l'introduction des imaginaires, on remplacerait au besoin le dénominateur x^n par $(-x)^n$.

Remarque. — Si n est entier, une des deux séries I_n ou I_{-n} cesse d'exister car tous ses coefficients deviennent infinis à partir d'un certain rang. Mais il y a toujours une des deux séries et, par conséquent, une des deux intégrales particulières qui subsiste. Dans ce cas, l'intégration se ramène aux quadratures par les théorèmes généraux (n° 165).

Supposons que n soit positif : c'est alors l'intégrale particulière I_n qui subsiste, et la formule d'intégration sera (n° 165)

$$y = CI_n + C_1 I_n \int \frac{dx}{x^{n+1} I_n^2}.$$

Mais cette intégrale peut encore s'exprimer par des séries potentielles, moins simples toutefois que celles de Bessel. Nous allons les faire connaître.

197. Nouvelles séries liées à celle de Bessel. — En dérivant I_n par rapport à n, on forme une nouvelle série potentielle, convergente pour toutes les valeurs de x et à coefficients rationnels. Nous la désignerons par I'_n et l'on aura, a_p étant défini par la formule (1),

$$(5) \qquad I'_n = \sum_1^{\infty} a'_p x^p, \qquad a'_p = -a_p \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{k}.$$

Considérons, d'autre part, la série potentielle, dépendant de deux paramètres ε et n,

$$\varphi(x, n, \varepsilon) = 1 + \frac{x}{(n+1)(\varepsilon+1)} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)} + \cdots$$

laquelle se réduit à I_n pour $\varepsilon = 0$.

Celle-ci peut être dérivée par rapport à ε et l'on trouve, pour $\varepsilon = 0$, la série potentielle à coefficients rationnels

$$(6) \qquad \varphi'_\varepsilon(x, n, 0) = \sum_1^{\infty} b_p x^p, \qquad b_p = -a_p \sum_1^{p} \frac{1}{k}.$$

Nous allons montrer que, quand n est entier, l'intégration de l'équation de Bessel se fait au moyen des séries (1), (5) et (6).

198. Intégration de l'équation de Bessel quand n est nul. — Dans ce cas, les deux séries I_n et I_{-n} se confondent. Nous avons toujours une intégrale particulière I_0. Il s'agit d'en obtenir une seconde.

A cet effet, considérons d'abord l'équation dans laquelle n est une quantité positive infiniment petite ε. Nous avons les deux intégrales distinctes I_ε et $I_{-\varepsilon}$. Mais nous pouvons remplacer la seconde par la combinaison linéaire

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[I_\varepsilon - \frac{I_{-\varepsilon}}{x^\varepsilon}\right] = \frac{x^\varepsilon I_\varepsilon - I_{-\varepsilon}}{x^\varepsilon \cdot \varepsilon}.$$

Quand ε tend vers 0, celle-ci a une limite finie Y_0, qui s'obtient par la règle de l'Hospital :

$$(7) \qquad Y_0 = \lim_{\varepsilon = 0} D_\varepsilon [x^\varepsilon I_\varepsilon - I_{-\varepsilon}] = I_0 \operatorname{Log} x + 2 I'_0.$$

Cette nouvelle intégrale Y_0 s'exprime donc au moyen de la fonction de Bessel I_0 et de la série (5) I'_0. Elle est évidemment distincte de I_0 puisqu'elle renferme un logarithme. L'intégrale générale sera

$$y = CI_0 + C_1 Y_0.$$

Remarque. — On a admis, dans cette démonstration, que la limite d'une intégrale de l'équation de Bessel où n tend vers 0, est une intégrale de cette équation pour $n = 0$. Ce postulat est une conséquence des propositions énoncées au n° 133. Nous ferons usage, dans le n° suivant, d'un postulat analogue, fondé sur les mêmes propositions.

199. Intégration de l'équation de Bessel quand n est entier et < 0. — Si n est un entier différent de 0, on peut le supposer positif (n° 195). Dans ce cas, la série I_{-n} cesse d'exister, mais l'intégrale particulière I_n subsiste toujours. Il s'agit d'en obtenir une seconde.

Remplaçons d'abord n par $n - \varepsilon$ (ε étant infiniment petit). Les n premiers termes de $I_{-n+\varepsilon}$ ne renferment pas le facteur ε au dénominateur et sont, par conséquent, finis : nous désignerons leur somme par N_ε. Tous les termes suivants, au contraire, sont infinis et ils renferment un facteur commun indépendant de x, que nous désignerons par $A_\varepsilon : \varepsilon$, en posant

$$A_\varepsilon = \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,(1-\varepsilon)(2-\varepsilon)\ldots(n-1-\varepsilon)}.$$

Considérons donc le produit $\varepsilon I_{\varepsilon - n}$; il peut, eu égard à la définition (n° 197) de $\varphi(x, n\,\varepsilon)$, se mettre sous la forme suivante

$$(8) \qquad \varepsilon I_{\varepsilon - n} = \varepsilon N_\varepsilon + x^n A_\varepsilon\, \varphi(x, n, \varepsilon).$$

Donc, ε tendant vers 0, on a, à la limite, φ tendant alors vers I_n,

$$(9) \qquad [\varepsilon I_{\varepsilon-n}]_0 = x^n A_0 I_n, \qquad A_0 = \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,(n-1)!}.$$

Tant que ε n'est pas nul, $I_{n+\varepsilon}$ et $\varepsilon I_{\varepsilon-n} : x^{n+\varepsilon}$ sont deux intégrales indépendantes de l'équation de Bessel, mais elles cessent d'être distinctes pour $\varepsilon = 0$, en vertu de l'équation (9). Pour en obtenir une nouvelle, considérons la combinaison linéaire (qui est aussi une intégrale)

$$\frac{\varepsilon I_{\varepsilon-n} - A_0 x^{n+\varepsilon} I_{n+\varepsilon}}{\varepsilon x^{n+\varepsilon}}$$

et cherchons-en la limite pour $\varepsilon = 0$. C'est une expression de la forme $0:0$; en vertu de la règle de l'Hospital, sa valeur pour $\varepsilon = 0$ sera

$$\frac{1}{x^n} D_\varepsilon [\varepsilon I_{\varepsilon-n} - A_0 x^{n+\varepsilon} I_{n+\varepsilon}].$$

Mais, pour $\varepsilon = 0$, il vient, par la formule (8),

$$D_\varepsilon (\varepsilon I_{\varepsilon-n}) = N_0 + x^n A_0 \varphi'_\varepsilon(x, n, 0) + x^n A'_0 I_n,$$

de sorte que la limite cherchée a ponr expression

$$\frac{N_0}{x^n} + A_0[\varphi'_\varepsilon(x, n, 0) + I'_n + I_n \operatorname{Log} x] + A'_0 I_n.$$

Supprimant le dernier terme qui n'est pas distinct de I_n, nous formons notre seconde intégrale particulière Y_n, à savoir

$$(10) \qquad Y_n = \frac{N_0}{x^n} + A_0[\varphi'_\varepsilon(x, n, 0) + I'_n + I_n \operatorname{Log} x].$$

Celle-ci s'exprime donc au moyen des trois séries potentielles I_n, I'_n et $\varphi'_\varepsilon(x, n, 0)$; la première est la fonction de Bessel, et les deux autres sont définies par les formules (5) et (6). Le coefficient A_0 est une constante (9) et enfin, par définition de N_ε, N_0 comprend les n premiers termes de I_{-n}, de sorte que

$$\frac{N_0}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x}, \quad c_p = \frac{(-1)^p}{p!\,(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}.$$

L'intégrale générale de l'équation de Bessel sera donc, dans ce cas-ci,

$$y = \mathrm{CI}_n + \mathrm{C}_1\mathrm{Y}_n.$$

200. Transformées de l'équation de Bessel. Équation de Riccati. — Changeons la variable indépendante par la relation $x = \varphi(t)$. En accentuant les dérivées par rapport à t, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^3};$$

l'équation de Bessel

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1 + n)\frac{dy}{dx} - y = 0$$

devient ainsi, après multiplication par x'

$$\frac{x}{x'}y'' + \left(1 + n - \frac{x}{x'}\frac{x''}{x'}\right)y' - x'y = 0.$$

Voici quelques cas particuliers de cette transformation générale :

1° Quel que soit le signe de x, on peut toujours faire, sans introduire d'imaginaires, une des deux substitutions

$$x = \pm\frac{t^2}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad x' = \pm\frac{t}{2}, \qquad \frac{x}{x'} = \frac{t}{2}, \qquad \frac{x''}{x'} = \frac{1}{t}.$$

L'équation transformée sera

$$(11) \qquad y'' + \frac{2n+1}{t}y' \pm y = 0.$$

2° Plus généralement, faisons la substitution

$$x = \alpha t^{\beta} \qquad \text{d'où} \qquad x' = \alpha\beta t^{\beta-1}, \qquad \frac{x''}{x'} = \frac{\beta-1}{t}.$$

L'équation transformée sera

$$t^2y'' + (\beta n - 1)\,ty' - \alpha\beta^2t^{\beta}y = 0.$$

On peut disposer des trois constantes α, β et n de manière à identifier cette équation avec toute équation de la forme

$$t^2y'' + aty' + bt^my = 0,$$

pourvu toutefois que b et m soient différents de 0, car la substitution suppose α et β différents de 0. Mais, si $m = 0$ ou si $b = 0$, cette dernière équation est une équation d'Euler (n° 193).

Les équations de cette dernière forme sont fréquentes dans les applications. Elles s'intégreront donc par les formules des n^{os} précédents, en remplaçant x par une expression convenable de la forme αt^β.

3° *La transformée d'Euler de l'équation* (particulière) *de Riccati* (n° 145) s'obient comme cas particulier de la transformation précédente.

Si l'on fait $n = 1 : \beta$ et qu'on change α en $\alpha : \beta^2$, on voit que l'équation de Bessel se ramène à

$$t^2 y'' - \alpha t^\beta y = 0, \qquad \text{par la substitution} \qquad x = \frac{\alpha t^\beta}{\beta^2}.$$

Faisons $\beta = m + 2$. On voit que l'*équation de Bessel* où $n = \dfrac{1}{m+2}$ se ramène à l'*équation transformée de Riccati* (n° 145) :

$$(12) \quad y'' - \alpha t^m y = 0, \text{ par la substitution } x = \frac{\alpha t^{m+2}}{(m+2)^2}.$$

D'où, les conclusions suivantes :

Si $m + 2$ n'est pas l'inverse d'un entier, l'équation (12) s'intègre par les transcendantes I_n et I_{-n} en faisant $n = 1 : (m+2)$ et en remplaçant x par la fonction de t qui précède.

Si $m + 2$ est l'inverse d'un nombre entier, l'intégration exigera l'intervention des séries plus compliquées du n° 197.

Si $m + 2 = 0$, l'équation (12) se réduit à une équation d'Euler (n° 193) et s'intègre sans difficulté.

On verra, au n° suivant, que, quand $m : (m + 2)$ est un nombre pair, l'équation (12) s'intègre sous forme finie

201. Intégration de l'équation de Bessel sous forme finie. — *L'équation de Bessel s'intègre sous forme finie si $n + \dfrac{1}{2}$ est un nombre entier (positif, nul ou négatif).*

Supposons, ce qui est permis, *n positif* (n° 195). Si $n + \dfrac{1}{2}$ est entier, c'est un entier positif p. Alors, par l'une des substitutions $x = \pm \dfrac{t^2}{4}$, l'équation de Bessel se ramène à l'une des deux équations (11)

$$(13) \qquad y'' - \frac{2p}{t} y' + y = 0.$$

Il faut donc montrer que *cette équation s'intègre sous forme finie quand p est un entier positif.*

A cet effet, observons que, t étant traité comme un paramètre, on a, par une intégration par parties,

$$\int e^{tu}(u^2 \pm 1)^{p-1}u\,du = \frac{e^{tu}}{2p}(u^2 \pm 1)^p - \frac{t}{2p}\int e^{tu}(u^2 \pm 1)^p du.$$

Nous allons tirer de cette relation la solution de l'équation de Bessel, en transformant les deux intégrales indéfinies qui y figurent par la formule symbolique du premier volume (n° 163), que voici

$$\int e^{tu}\mathrm{E}(u)du = \mathrm{E}(\mathrm{D}_t)\frac{e^{tu}}{t} + \mathrm{C},$$

et dans laquelle $\mathrm{E}(u)$ est un polynome (*). Cette formule s'applique aux deux intégrales susdites si p est entier positif, car $u(u^2 \pm 1)^{p-1}$ et $(u^2 \pm 1)^p$ sont des polynomes. Désignant par D les dérivées par rapport à t, il vient ainsi, à une constante près par rapport à u,

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}^2 \pm 1)^{p-1}\frac{e^{tu}}{t} = \frac{e^{tu}}{2p}(u^2 \pm 1)^p - \frac{t}{2p}(\mathrm{D}^2 \pm 1)^p\frac{e^{tu}}{t}.$$

Mais cette constante est nulle, car, si l'on suppose t positif, les deux membres de cette relation s'annulent pour $u = -\infty$. Donc cette relation est une identité. Elle subsiste pour toutes les valeurs réelles ou imaginaires de t et de u, car les dérivées des exponentielles se calculent toujours par les mêmes règles.

Multiplions l'identité précédente par $2p : t$ et posons, dans les deux membres,

$$(14) \qquad y = (\mathrm{D}^2 \pm 1)^{p-1}\frac{e^{tu}}{t};$$

elle prend la forme

$$(\mathrm{D}^2 \pm 1)y + \frac{2p}{t}\mathrm{D}y = \frac{e^{tu}}{t}(u^2 \pm 1)^p.$$

Le premier membre est précisément celui de l'équation (13). Donc, comme p est > 0, il suffit de choisir u de manière à

(*) J'ai exposé cette méthode de calcul dans les *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 1905.

annuler $u^2 \pm 1$ pour obtenir par la formule (14) une solution de l'équation (13). Examinons ces solutions pour chacune des déterminations du signe ambigu.

Premier cas : L'équation est de la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2p}{t}\frac{dy}{dt} - y = 0.$$

Il faut alors annuler $u^2 - 1$, ce qui donne pour u deux valeurs $+1$ et -1, auxquelles correspondent deux solutions indépendantes :

$$(D^2 - 1)^{p-1}\frac{e^t}{t}, \qquad (D^2 - 1)^{p-1}\frac{e^{-t}}{t}$$

ou, en faisant usage de la formule (10) du n° 191

$$e^t(D + 2)^{p-1} D^{p-1}\frac{1}{t}, \qquad e^{-t}(D - 2)^{p-1} D^{p-1}\frac{1}{t}.$$

Supprimant un facteur constant dans chacune de ces expressions, on obtient les deux intégrales particulières pratiques :

$$y_1 = e^t\left(1 + \frac{D}{2}\right)^{p-1}\frac{1}{t^p}, \qquad y_2 = e^{-t}\left(1 - \frac{D}{2}\right)^{p-1}\frac{1}{t^p}$$

qui s'explicitent entièrement avec la plus grande facilité. L'intégrale générale sera $y = Cy_1 + C_1y_2$.

Deuxième cas : L'équation est de la forme

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2p}{t}\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Il faut alors annuler $u^2 + 1$. Faisant $u = i$, on obtient la solution complexe

$$y = (D^2 + 1)^{p-1}\frac{e^{it}}{t},$$

qui se décompose elle-même en deux solutions réelles distinctes :

$$y_1 = (D^2 + 1)^{p-1}\frac{\cos t}{t}, \qquad y_2 = (D^2 + 1)^{p-1}\frac{\sin t}{t},$$

pouvant servir à former l'intégrale générale.

Mais, si l'on veut effectuer tous les calculs, il sera plus simple de procéder comme dans le premier cas. Mettant l'intégrale complexe sous la forme

$$y = e^{it}(D + 2i)^{p-1} D^{p-1}\frac{1}{t}$$

et supprimant un facteur constant, on a une nouvelle intégrale complexe

$$y = e^{it}\left(1 + \frac{D}{2i}\right)^{p-1} \frac{1}{t^p}.$$

Celle-ci s'exprime immédiatement sous forme explicite et l'on obtient deux intégrales réelles indépendantes en séparant le réel et l'imaginaire. Nous ne les écrirons pas. Si l'on ne se préoccupait pas d'obtenir une intégrale de forme réelle, on obtiendrait immédiatement une seconde intégrale complexe, indépendante de la précédente, en remplaçant dans celle-ci i par $-i$.

Cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati. — L'équation $y'' - \alpha t^m y = 0$ se ramène (n° 200) à celle de Bessel où l'on fait $n = 1 : (m + 2)$. Pour que $n + \frac{1}{2}$ soit entier, il faut ainsi que

$$\frac{1}{m+2} + \frac{1}{2} \text{ soit entier } \left(\text{ou } \frac{m}{m+2} \text{ pair}\right).$$

Donc, pour que cette équation, qui est la transformée d'Euler de l'équation de Riccati, puisse se ramener aux équations que nous venons d'intégrer, il faut que $m : (m + 2)$ soit un nombre pair. Telle est aussi la condition d'intégrabilité sous forme finie de l'équation particulière de Riccati non transformée (n° 145),

$$y' + ay^2 = bx^m.$$

§ 9. Intégration ou réduction d'équations différentielles par des procédés particuliers

202. Équations où manque y. — Quand la fonction inconnue y manque dans une équation, *on abaisse d'une unité l'ordre de cette équation* en posant $p = \frac{dy}{dx}$ et en prenant p comme nouvelle inconnue.

En effet, l'équation proposée

$$(1) \qquad f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

se ramène ainsi à la suivante

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right) = 0. \tag{2}$$

On intègre l'équation (2), ce qui conduit à une relation

$$F(p, x) = 0. \tag{3}$$

Le calcul peut alors s'achever de diverses manières :

1° On résout l'équation (3) par rapport à p, ce qui donne $p = \varphi(x)$ et l'intégale générale y de l'équation (1) s'en déduit par une quadrature :

$$y = \int p\,dx = \int \varphi(x)\,dx.$$

2° S'il est plus facile de résoudre l'équation (3) par rapport à x, on en tire $x = \psi(p)$. Alors on cherche aussi la valeur de y en fonction de p et il vient, par une quadrature,

$$y = \int p\,dx = \int p\psi'(p)\,dp = p\psi(p) - \int \psi(p)\,dp.$$

3° On exprime p et x en fonctions : $p = \varphi(t)$ et $x = \psi(t)$ d'un paramètre t. On obtient aussi y en fonction de t par une quadrature

$$y = \int p\,dx = \int \varphi(t)\psi'(t)\,dt.$$

Dans ces deux derniers cas, on connaît x et y en fonction d'un paramètre p ou t : c'est une *représentation paramétrique* de l'intégrale. Il suffirait d'éliminer p ou t pour revenir au mode de représentation habituel.

Exemple. — L'équation (où X et X_1 dépendent de x seul)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X\frac{dy}{dx} = X_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

se ramène à une équation de Bernoulli (n° 111)

$$\frac{dp}{dx} + Xp = X_1p^2.$$

Donc p, puis y s'obtiennent par des quadradures en fonction de x.

Plus généralement, *si y et ses $k-1$ premières dérivées manquent dans l'équation, l'ordre s'abaissera de k unités en* posant $\frac{d^k y}{dx^k} = u$ et en prenant u comme nouvelle inconnue.

En effet, l'équation d'ordre n sera ramenée à celle d'ordre $n-k$

$$f\left(x, u, \frac{du}{dx}, \dots \frac{d^{n-k}u}{dx^{n-k}}\right) = 0.$$

L'intégrale de celle-ci sera de la forme

$$(4) \qquad F(u, x) = 0.$$

Comme ci-dessus, le calcul peut s'achever de plusieurs manières :

1° On résout l'équation (4) par rapport à u, ce qui donne $u = \varphi(x)$ et l'intégrale générale y s'en déduit par k quadratures :

$$(5) \qquad y = \int\int \dots \int \varphi(x) dx^k.$$

2° On résout l'équation (4) par rapport à x, d'où $x = \psi(u)$ et l'on obtient y en fonction de u par k quadratures :

$$(6) \qquad y = \int\int \dots \int u\, dx^k = \int\int \dots \int u \left| \psi'(u) du \right|^k,$$

le facteur $\psi'(u)du$ s'introduisant *une fois* à chaque intégration.

On a ainsi une *représentation paramétrique* de l'intégrale.

3° On exprime u et x en fonction d'un paramètre t, en sorte que $u = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$. On obtient y en fonction de t par k quadratures :

$$y = \int\int \dots \int \varphi(t) \left| \psi'(t) dt \right|^k.$$

Les quadratures consécutives de la formule (5) peuvent se ramener à une seule intégration par la formule (5) du n° 189. La formule (5) ci-dessus sera remplacée par

$$y = P_{k-1} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} \varphi(t) dt,$$

où P_{k-1} est un polynome en x arbitraire de degré $< k$.

Exemples. — Les équations suivantes s'intègrent sous forme finie :

$$(1-x^2)y''-xy'=2, \qquad 1+y'^2+xy'y''=ay''\sqrt{1+y'^2}.$$

On pose $y'=p$. La première équation est linéaire en p ; la seconde devient différentielle exacte (n° 146) en la divisant par $\sqrt{1+p^2}$.

203. Cas particulier. Equations qui ne contiennent que deux dérivées consécutives. — *Elles s'intègrent par des quadratures.*

En effet, elles sont de la forme

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right);$$

donc, par la substitution $\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=u$, elles se ramènent à une équation du premier ordre et à variables séparées

$$\frac{du}{dx}=f(u), \qquad \text{d'où} \qquad x=\int\frac{du}{f(u)}=\psi(u).$$

La valeur de y s'en déduit par $n-1$ quadratures par l'une des deux méthodes 1° ou 2° du n° précédent. La méthode 2° se présente la première, puisque l'on connaît déjà la relation $x=\psi(u)$, et la valeur de y en fonction de u est immédiatement donnée par la formule (6). Pour employer la méthode 1°, il faut commencer par tirer $u=\varphi(x)$ de la relation $x=\psi(u)$ et alors y est donné en fonction de x par la formule (5).

Exemples. — Voici quelques équations pour lesquelles les quadratures se font aisément sous forme finie :

$$ay''=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}, \quad ay''=\sqrt{1+y'^2}, \quad y^{\text{IV}}=\sqrt{y'''}, \quad ay''=y'(1+y^2).$$

Les deux équations de gauche sont celles d'un cercle et d'une chaînette.

204. Equations où manque x. — Quand la variable indépendante x manque, l'équation est de la forme

$$(7) \qquad f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$$

Son ordre peut être abaissé d'une unité.

En effet, ce cas se ramène à celui où c'est la fonction qui manque (n° 202) en considérant x comme fonction de y. Mais il faut, pour cela, remplacer les dérivées de y par rapport à x par leurs expressions au moyen des dérivées de x par rapport à y. Celles-ci étant désignées par des accents, les formules (2) du n° 129 du 1er volume donnent, comme cas particulier, en y faisant $y' = 1$, $y'' = y''' = 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x''}{x'^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5}, \ldots$$

On substituera ces valeurs dans l'équation proposée et l'ordre s'abaissera d'une unité en prenant x' pour inconnue.

Mais, en pratique, on ne fait guère cette transformation. On prend plutôt $p = \dfrac{dy}{dx}$ comme nouvelle inconnue et on la considère comme fonction de y. On obtient une équation d'ordre moins élevé d'une unité entre y et p, car les dérivées de y par rapport à x s'expriment au moyen des dérivées, d'ordre moindre d'une unité, de p par rapport à y. Les formules de transformation sont

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right), \ldots$$

Donc l'équation proposée, qui est d'ordre n, se ramènera à une équation d'ordre $n - 1$ entre y et p. Soit

$$(8) \qquad f\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

cette équation. Supposons qu'on sache l'intégrer, son intégrale sera

$$(9) \qquad \mathrm{F}(y, p) = 0.$$

Le calcul peut alors s'achever de diverses manières :

1° On résout l'équation (9) par rapport à p, d'où $p = \varphi(y)$ et la valeur de x s'obtient par une quadrature :

$$x = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{dy}{\varphi(y)}.$$

C'est l'intégrale générale de l'équation proposée.

2° S'il est plus facile de résoudre l'équation (9) par rapport à y, on en tire $y = \psi(p)$, ensuite x s'obtient aussi en fonction de p par une quadrature :

$$x = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{\psi'(p)\,dp}{p} = \frac{\psi(p)}{p} + \int \frac{\psi(p)\,dp}{p^2}.$$

Donc x et y sont exprimés en fonction de p : c'est une *représentation paramétrique* de l'intégrale.

3° On exprime p et y en fonction d'un paramètre t par les formules $p = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. On en tire

$$x = \int \frac{dy}{p} = \int \frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)},$$

ce qui fournit une représentation paramétrique de l'intégrale.

Soit, par exemple, l'équation importante

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y). \tag{10}$$

Il vient, par la transformation précédente,

$$p\frac{dp}{dy} = f(y) \quad \text{d'où} \quad p^2 = 2\int f(y)\,dy, \qquad x = \int \left[2\int f(y)\,dy\right]^{-\frac{1}{2}} dy.$$

C'est l'intégrale générale de l'équation (10), qui dépend, comme on le voit, de deux quadratures.

Exemples. — Les deux équations :

$$y'' + Yy'^2 = Y_1 y', \qquad y'' + Yy'^2 = Y_1,$$

dans lesquelles Y et Y_1 dépendent de y seul, se ramènent respectivement à une équation linéaire en p, ou linéaire en p^2 :

$$\frac{dp}{dy} + Yp = Y_1, \qquad \frac{d.p^2}{dy} + 2Yp^2 = 2Y_1.$$

Donc p, puis x s'obtiennent par des quadratures en fonction de y.

Pour les deux équations suivantes du dernier type, ces quadratures se font sous forme finie :

$$2(2a - y)y'' = 1 + y'^2,$$
$$yy'' - y'^2 = y^2 \operatorname{Log} y.$$

La première se ramène à une équation à variables séparées

$$\frac{2p\,dp}{1+p^2} = \frac{dy}{2a-y}.$$

Mais il est plus simple d'intégrer la seconde en la mettant sous la forme $(D^2 - 1)\operatorname{Log} y = 0$, d'où $\operatorname{Log} y = Ce^x + C_1e^{-x}$.

205. Equations qui ne contiennent que deux dérivées dont les ordres diffèrent de deux unités. — *Elles s'intègrent par des quadratures.* C'est un nouveau cas particulier de la méthode du n° 202. L'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$$

se ramène, en posant $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = u$, à celle

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(u),$$

intégrée au n° précédent, et qui a pour intégrale

$$x = \int \left|2\int f(u)\,du\right|^{-\frac{1}{2}} du = \psi(u).$$

On en déduit la valeur de y par $n-2$ nouvelles quadratures en employant l'une des deux méthodes 1° ou 2° du n° 202. On a immédiatement y en fonction de u par la formule (6) (méthode 2°), pour obtenir y en fonction de x par la formule (5) (méthode 1°), il faudra préalablement tirer $u = \varphi(x)$ de l'équation $x = \psi(u)$ ci-dessus.

206. Equations différentielles exactes. — Considérons l'équation

$$f(x, y, y', \dots y^n) = 0.$$

Si l'on reconnaît dans son premier membre la dérivée exacte d'une fonction $F(x, y, y', \dots y^{n-1})$ quel que soit y, on dit que l'équation est *différentielle exacte* et on peut en écrire immédiatement une intégrale première

$$F(x, y, y', \dots y^{n-1}) = C.$$

On trouvera ci-dessous la règle à suivre pour reconnaître si l'équation est différentielle exacte et pour obtenir la fonction F quand elle existe, mais cette règle est d'une application assez limitée en pratique.

Dans certains cas simples, on peut rendre l'équation différentielle exacte en la multipliant par un facteur facile à apercevoir et l'on peut abaisser l'ordre de l'équation d'une unité. Il n'y a pas de règle générale à donner, car cette méthode dépend de la perspicacité de l'opérateur, mais en voici un exemple :

Considérons l'équation, résolue (autrement) par Liouville,

$$y'' + Xy' = Yy'^2,$$

dans laquelle X dépend de x seul et Y de y seul. En la divisant par y', tous ses termes deviennent des dérivées exactes ; on a

$$\frac{y''}{y'} = Yy' - X.$$

On en tire, par une intégration,

$$\operatorname{Log} y' = \int Ydy - \int Xdx, \qquad \text{d'où} \qquad y' = e^{\int Ydy - \int Xdx}.$$

Les variables se séparent et l'on trouve l'intégrale générale

$$\int e^{-\int Ydy} dy = \int e^{-\int Xdx} dx.$$

Il est à observer que l'équation

$$y'' + Py' = Qy'^2$$

s'intègre par quadratures dans les trois cas suivants : 1° si P et Q dépendent de x seul (n° 202) ; 2° si P et Q dépendent de y seul (n° 201) ; 3° si P dépend de x seul et Q de y seul (on vient de le montrer).

Règle générale pour l'intégration des dérivées exactes. — Soit $f(x, y, y', \ldots y^n)$ une fonction donnée. Pour qu'elle soit la dérivée exacte d'une fonction $F(x, y, y', \ldots y^{n-1})$, il faut qu'on ait l'identité

$$f(x, y, y', \ldots y^n) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{n-1}} y^n.$$

On en conclut la règle suivante pour reconnaître si F existe et déterminer en même temps cette fonction :

Il faut d'abord que la plus haute dérivée y^n n'entre dans f qu'au premier degré. On intègre alors le coefficient de y^n *partiellement* par rapport à y^{n-1}, c'est-à-dire comme si y^{n-1} était seule variable. Soit u_1 l'intégrale obtenue ; $f - \frac{du_1}{dx}$ ne contiendra plus de terme en y^n, de sorte que la plus haute dérivée sera y^{n-p} $(p \geqslant 1)$. Cette différence devant être une dérivée exacte en même temps que f, il faut que y^{n-p} n'y entre qu'au premier degré. On intégrera alors le coefficient de y^{n-p} partiellement par rapport à y^{n-p-1}, ce qui donnera une intégrale u_2, Alors $f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx}$ ne contiendra plus que des termes d'ordre $< n - p$ et devra être une différentielle exacte si f en est une. En continuant ainsi et si la fonction donnée f est une dérivée exacte, on parviendra, en dernier lieu, à un reste

$$f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx} - \dots - \frac{du_k}{dx} = \mathrm{X},$$

ne contenant plus de dérivée de y. Pour que celui-ci soit une dérivée exacte, il faut qu'il ne contienne plus que x. Si cette condition a lieu, on aura

$$\mathrm{F} = u_1 + u_2 + \dots + u_k + \int \mathrm{X}dx.$$

Si cette condition n'avait pas lieu, ou si, dans le cours du calcul, on rencontrerait un reste dans lequel la plus haute dérivée entrât à un degré supérieur au premier, la méthode cesserait d'être applicable et la fonction proposée ne serait pas une dérivée exacte.

Soit, par exemple, la fonction donnée

$$f = y + 3xy' + 2yy'^3 + (x^2 + 2y^2y')y''.$$

On aura successivement

$$u_1 = x^2y' + y^2y'^2, \qquad f - \frac{du_1}{dx} = y + xy',$$

$$u_2 = xy, \qquad f - \frac{du_1}{dx} - \frac{du_2}{dx} = \mathrm{X} = 0.$$

Par conséquent, $\mathrm{F} = x^2y' + y^2y'^2 + xy + \mathrm{C}$.

207. Equations homogènes. — Il y en a de diverses espèces. Mais les divers cas que nous allons étudier ne s'excluent pas nécessairement l'un l'autre.

Premier cas : *L'équation est homogène par rapport à y et à ses dérivées successives (ou par rapport à y, dy, d^2y,...)*, c'est-à-dire que l'équation se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on y remplace y par λy sans toucher à x, λ désignant une constante. *L'ordre de ces équations peut être abaissé d'une unité.*

En effet, faisons la substitution

$$y = e^z, \quad \text{d'où} \quad y' = e^z z', \qquad y'' = e^z(z'' + z'^2),\ldots$$

Si nous portons ces valeurs dans l'équation, e^z vient en facteur commun à une certaine puissance par suite de l'homogénéité. Après la suppression de ce facteur commun, la fonction inconnue z aura disparu de l'équation, donc l'ordre de l'équation s'abaissera d'une unité en prenant z' comme inconnue (n° 202).

Remarque. — Ce procédé s'applique à l'équation linéaire sans second membre, mais généralement sans avantage, parce qu'il enlève le caractère linéaire. Ainsi, par cette substitution, l'équation du deuxième ordre

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

se ramène à l'équation de Riccati, du premier ordre en z',

$$\frac{dz'}{dx} + (z'^2 + Pz' + Q) = 0,$$

ce que nous avons déjà remarqué (n° 145).

Exemples. — On peut appliquer cette méthode aux équations

$$ayy'' + by'^2 = yy'(c^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$xyy'' - xy'^2 = yy' + bxy'^2(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Les équations en z' sont des équations de Bernoulli et les intégrales s'obtiennent sous forme finie. Toutefois on intègre plus facilement la première équation en remarquant que tous ses termes deviennent des dérivées exactes quand on la divise par yy' (n° 206).

DEUXIÈME CAS : *L'équation est homogène par rapport à x et dx*, c'est-à-dire se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on remplace x par λx sans toucher à y. *L'ordre peut être abaissé d'une unité.*

Ce cas se ramène au précédent en considérant y comme la variable indépendante, et x comme la fonction inconnue. Il faudra donc remplacer les dérivées de y par rapport à x par leurs expressions au moyen des dérivées de x par rapport à y (n° 204). Portant ces valeurs dans l'équation, on sera ramené au cas précédent.

En pratique, il est souvent préférable d'opérer autrement. On change de variable indépendante par la substitution $x = e^t$. Si l'on désigne par D les dérivées relatives à t, on a, de proche en proche, par la formule $De^{-ax}z = e^{-ax}(D - a)z$,

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}Dy, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-t}D(e^{-t}Dy) = e^{-2t}D(D-1)y, \ldots$$

et, en général,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{-nt}D(D-1)\ldots(D-n+1)y.$$

Ainsi l'exposant de e^t dans l'expression de $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ est précisément égal au degré d'homogénéité $-n$ de cette dérivée. Donc, si l'on porte ces valeurs de x, $\dfrac{dy}{dx}, \ldots$ dans l'équation, e^t vient en facteur commun à une puissance marquée par le degré d'homogénéité. Après la suppression de ce facteur commun, la variable indépendante t aura disparu. Donc l'ordre de l'équation peut être abaissé d'une unité (n° 204).

Il est à remarquer que, *pratiquement*, quand on substitue dans l'équation proposée les valeurs de $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ indiquées ci-dessus, on néglige tout de suite les exponentielles e^{-t}, $e^{-2t}, \ldots$ qui disparaissent du résultat et l'on remplace simplement x par 1.

Exemple. — Soit l'équation (homogène de degré 0)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \left[mx^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ny^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Par la substitution $x = e^t$, on a

$$D(D-1)y = (mDy^2 + ny^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons $Dy = p$ pour inconnue ; nous avons $D^2y = p\dfrac{dp}{dy}$, d'où

$$p\frac{dp}{dy} - p = (mp^2 + ny^2)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est une équation homogène du 1er ordre. L'intégration s'achève par des quadratures.

TROISIÈME CAS : *L'équation est homogène par rapport à x, y et leurs différentielles dx, dy, d^2y,...*, c'est-à-dire qu'elle se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on remplace à la fois x par λx et y par λy, λ désignant une constante. *L'ordre peut être abaissé d'une unité.*

Ce cas se ramène au précédent par la substitution $y = ux$ en considérant u comme nouvelle inconnue. En effet, si l'on change x en λx sans toucher à u, cela revient à changer x en λx et y en λy et l'équation entre u et x se reproduira multipliée par une puissance de λ ; donc elle sera homogène par rapport à x et à dx.

Pratiquement, on opère directement comme il suit : on change tout de suite de fonction et de variable par les formules

$$x = e^t, \qquad y = e^t u,$$

t désignant la nouvelle variable indépendante, on a alors, eu égard à la formule du n° précédent, puis par la formule (10) du n° 191,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{-nt}\, D(D-1)\ldots(D-n+1)\,.\,e^t u$$
$$= e^{-(n-1)t}(D+1)D\ldots(D-n+2)u.$$

Portant ces valeurs de x, y, $\dfrac{dy}{dx}$,... dans l'équation proposée, on obtient une équation entre u et t où manque la variable indépendante t. Donc l'ordre de cette équation peut s'abaisser d'une unité.

Les équations d'Euler (n° 193) sont des équations homogènes de cette espèce et de degré 0. On leur applique précisément la substitution indiquée ici.

Exemples. — Les deux équations suivantes :

$$mx^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2, \qquad 2x^4 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^3,$$

conduisent à des équations de Bernoulli en Du et ont respectivement pour intégrales :

$$C_1 + C_2 x = xe^{-\frac{y}{mx}}, \qquad y = x\left(C - \text{arc sin}\frac{C_1}{x}\right).$$

Quatrième cas : *L'équation est homogène par rapport aux quantités x, dx (considérées comme de degré 1) et y, dy, d^2y,... (considérées comme de degré n)*, c'est-à-dire que l'équation se reproduit multipliée par une puissance de λ quand on remplace x par λx et y par $\lambda^n y$. Ce cas se ramène au précédent en posant $y = z^n$. Mais il est inutile de passer par cette transformation. Il vaut mieux changer tout de suite de fonction et de variable par les formules

$$x = e^t, \qquad y = ue^{nt}.$$

Soit D l'indice de dérivation par rapport à t ; on aura, en général, en appliquant encore la formule (10) du n° 191,

$$\frac{d^py}{dx^p} = e^{-pt}D(D-1)\dots(D-p+1)\,ue^{nt}$$
$$= e^{(n-p)t}(D+n)(D+n-1)\dots(D+n-p+1)u.$$

L'exposant de e^t est égal au degré d'homogénéité de $\frac{d^py}{dx^p}$. Donc, si l'on substitue ces valeurs de x, y, $\frac{dy}{dx}$,... dans l'équation, la même exponentielle viendra en facteur commun et la variable t disparaîtra par la suppression de ce facteur.

Exemple. — Soit l'équation (homogène de degré 4, en considérant y comme un carré)

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} = (x^3 + 2xy)\frac{dy}{dx} - y^2.$$

Par les substitutions $x = e^t$ et $y = ue^{2t}$, on trouve l'équation en u

$$D^2u + 2(1-u)Du = 0.$$

Le premier membre est une dérivée exacte, d'où l'intégrale première

$$Du - (1 - u)^2 = C,$$

Les variables se séparent et l'intégration s'achève sans difficulté.

208. Equation du second ordre où manque $\frac{dy}{dx}$ (Equation de Jacobi). — Jacobi a montré que si l'on connaît une intégrale première de l'équation

(11) $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

l'intégration s'achève par des quadratures. Soit, en effet, connue l'intégrale première (contenant une constante C)

(12) $$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, C)\ ;$$

je dis que $\frac{\partial\varphi}{\partial C}$ *sera le facteur intégrant* (n° 146) *de l'équation*

$$dy - \varphi dx = 0,$$

de sorte que l'intégrale générale sera

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial C}(dy - \varphi dx) = C_1.$$

Pour établir cette proposition, nous remarquons que toute intégrale de l'équation (11), vérifiant (12), satisfait aussi aux deux équations suivantes :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \qquad f(x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi(x, y, C),$$

obtenues en dérivant (12) puis en éliminant les dérivées de y. Mais la dernière équation, qui a eu lieu entre x, y et C seulement, est une *identité*, car elle est satisfaite par des valeurs arbitraires de x, y et y' (donc de C qui est arbitraire avec y'). On peut donc la dériver partiellement par rapport à C ; on en déduit une nouvelle identité

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial C} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial C}\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial C} = 0, \text{ c.-à-d. } \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right).$$